

Berechnung der Profilkurve einer Hemmung für die Konstruktion eines mechanischen Uhrwerkes

Kai Schmidt – B√auns

3. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Projektgeschichte	1
2	Das Uhrwerk und sein mechanisches Prinzip	2
2.1	Energiereservoir	2
2.2	Unruh	3
2.3	Hemmung	3
3	Problemstellung	4
3.1	Anforderungen an das Profil	4
4	Verschiedene Ansätze und ihre Ergebnisse	5
4.1	Ansatz über isogonale Trajektorien im Polarkoordinatensystem	5
4.2	Drehmomentverhältnis mithilfe von Geometrie und Analysis	7
4.3	Bestätigung des Ergebnisses durch physikalische Betrachtungen	10
5	Anwendung der berechneten Kurve auf ein reales Profiltrad durch Parallelkurven	12
6	Messreihe zum Vergleich der Ansätze	14
6.1	Verfahren zur Aufnahme der Messreihe	14
6.2	Auswertung der Daten	15
7	Ausblick	15
8	Danksagung	16
	Appendices	16
A	Vollständige Rechnung	17
B	Erweiterte Datenauswertung	19

Zusammenfassung

Das Ziel dieses Projektes besteht darin, die Kurve des Profiltrades einer speziellen Hemmung, die auch als „Tic Tac-Hemmung“ bekannt ist, nach wohldefinierten Parametern zu berechnen. Diese findet Verwendung in einem selbst konstruierten mechanischen Uhrwerk, das vollständig mit einem 3D-Drucker herstellbar ist. Es werden dazu verschiedene Ansätze vorgestellt, von denen sich einer als gut geeignet erweist. Dessen Ergebnis wird anschließend zusätzlich durch eine einfachere, physikalische Betrachtung bestätigt und die Überlegenheit des mathematischen Ansatzes gegenüber eines empirischen konnte auch praktisch am Uhrwerk gezeigt werden.

1 Projektgeschichte

Auf den ersten Blick mag einem das Ziel dieses Projektes sehr abstrakt vorkommen, weshalb ich zuerst erklären möchte, wie sich meine Motivation in diese Richtung entwickelte.

Die erste Anregung, die ich zur eigenen Konstruktion eines mechanischen Uhrwerkes erfuhr, rührte aus dem Physikunterricht her, in dem das Thema „Schwingungen“ behandelt wurde. Mechanische schwingungsfähige Systeme, wie z. B. ein Massestück an einer Spiralfeder, faszinierten mich mit ihren periodischen Energieumwandlungen so sehr, dass ich versuchte, besonders einfache für den 3D-Druck zu konstruieren, und nach wenigen Tagen fand ich ein solches durch meine Hände in Schwingungen versetzt. Mich überkam jedoch das Gefühl, dass immer noch etwas fehlte und langsam regte sich in mir der Ehrgeiz, eine Mechanik zu konstruieren, die – einmal aufgezo- gen – den Schwinger automatisch anregt. Und genau das wäre ein Gerät, das die Eigenschaften eines mechanischen Uhrwerkes besäße.

Letztendlich hat mich eine kleine Sammlung mechanischer Uhren, die ich besitze, dazu bewegt, mit der Konstruktion des Uhrwerkes zu beginnen. Ich hatte dabei schließlich den Ehrgeiz, nicht einfach das mechanische Prinzip der vorliegenden Uhren zu übernehmen, sondern mir ein eigenes, das besonders einfach und minimalistisch sein sollte, zu überlegen. Es dauerte einige Wochen, die mit dem Konstruieren, Drucken und Testen von Prototypen erfüllt waren, und ich hielt zuerst eine zufriedenstellend schwingende Unruh in den Händen, dann eine zahnradbetriebene Hemmung, die mir zu dem Zeitpunkt besonders einfach erschien, und schließlich zog ich das erste Mal ein vollständig selbst konstruiertes mechanisches Uhrwerk, das Abbildung 1 zeigt, auf, das daraufhin sogar fast einwandfrei lief. Und dies ist offenbar das glückliche Ende meiner Geschichte von der Konstruktion eines Uhrwerkes – könnte man meinen.

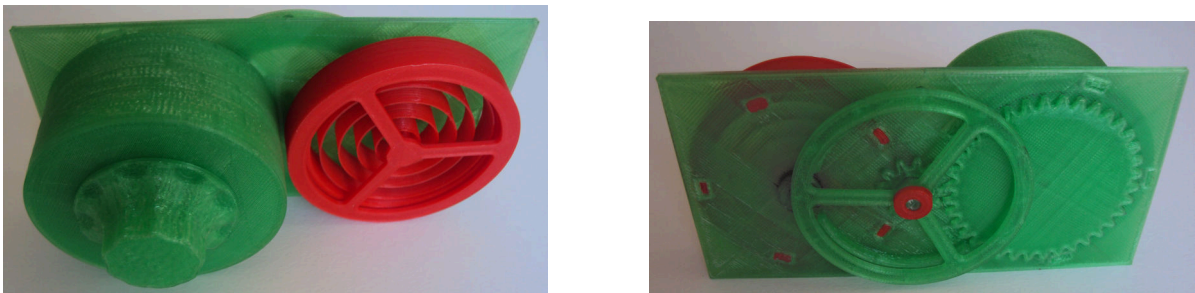


Abbildung 1: Das vollständig zusammengesetzte Uhrwerk

Tatsächlich beschäftigt mich aber noch bis jetzt ein Detail in meiner Konstruktion, in dem sich wohl ein Problem der Geometrie manifestiert, das die Hemmung des Uhrwerkes und dessen Profilrad betrifft. Um dieses verständlich zu machen, möchte ich im nächsten Kapitel einige Worte über die Konstruktion und ihre Funktionsweise verlieren.

2 Das Uhrwerk und sein mechanisches Prinzip

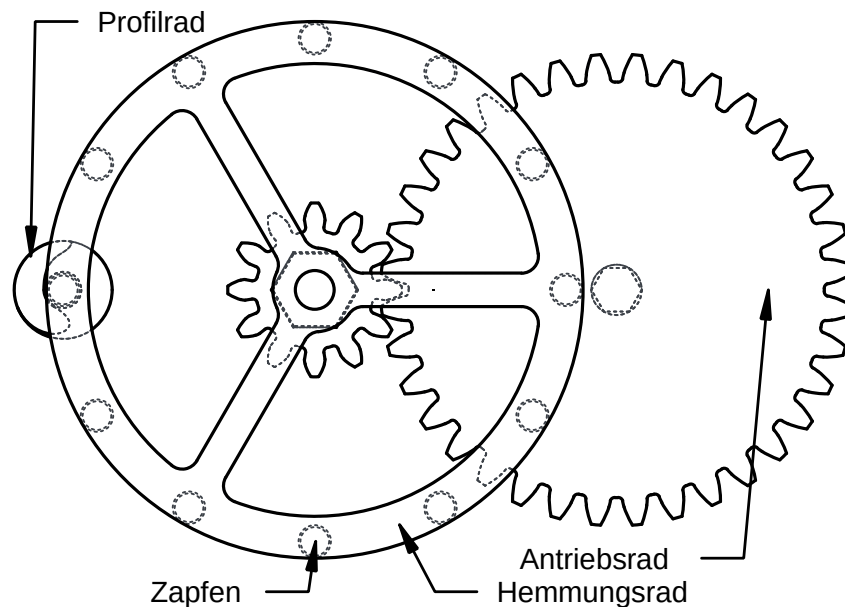


Abbildung 2: Konstruktionszeichnung zu den wichtigsten Bestandteilen des Uhrwerkes

Das Uhrwerk lässt sich in drei Haupteinheiten einteilen, die in den folgenden Unterkapiteln einzeln beschrieben werden sollen. Abbildung 2 gibt einen Überblick über deren mechanische Verbindung, um die Einordnung der einzelnen Komponenten zu erleichtern.

2.1 Energiereservoir

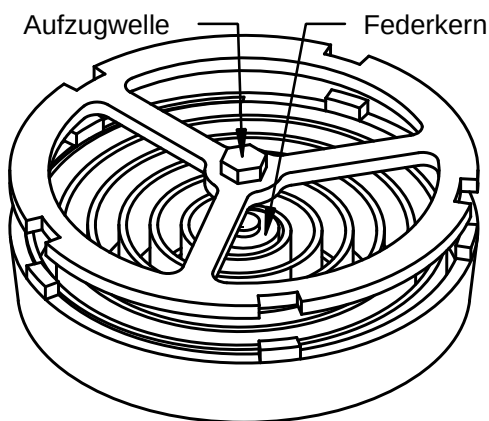


Abbildung 3: Aufbau eines Federhauses: Das Bauteil mit der Aufzugswelle ist zur verständlicheren Darstellung etwas angehoben. Nicht sichtbar ist das sechseckige Innenprofil, das unten in den Federkern eingelassen ist. Zwischen diesem und dem äußeren Teil des Federhauses und damit der Aufzugswelle wirkt im gespannten Zustand die Federkraft. Beide Sechseckprofile passen ineinander, sodass sich mehrere Federhäuser hintereinanderschalten lassen.

Um Schwingungen entgegen der Reibung innerhalb des Systems anzuregen, muss das Uhrwerk über eine einfache Energiequelle verfügen. In diesem Fall besteht sie aus einem Verbund zweier Spiralfedern, die beim Aufziehen gespannt werden. Genauer handelt es sich um zwei hintereinandergeschaltete Federhäuser, deren Aufbau Abbildung 3 zeigt. Das eine Federhaus ist dabei mit einer Sperrklinke versehen, damit sich die Federn nach dem Aufziehen nicht direkt wieder entspannen, sodass im gespannten Zustand die gesamte Federkraft auf die restliche Uhrwerkmechanik wirkt. Die Feder des zweiten Federhauses ist nun mit einem großen Zahnrad, dem Antriebsrad, verbunden, sodass im gespannten Zustand darauf ein gewisses Drehmoment ausgeübt wird. In einer Uhr, die über Uhrzeiger verfügt, würde dieses Zahnrad auch ihre Getriebe antreiben, aber für ein reines Uhrwerk reicht es aus, wenn es nur die über ein kleines Zahnrad an das Antriebsrad angeschlossene Hemmung in Bewegung setzt. Ihre Funktionsbeschreibung soll

als letztes erfolgen, weil sie eine mechanische Verbindung der Antriebsfeder zur Unruh darstellt und Hauptbestandteil der Problemstellung ist.

2.2 Unruh

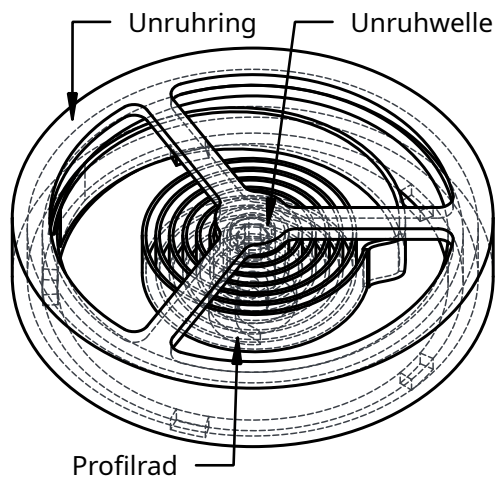


Abbildung 4: Aufbau der Unruh und ihre Verbindung zum Profilrad: Um am Unruhring ein möglichst großes Trägheitsmoment mit wenig Material zu erreichen, ist die Masse so weit wie möglich von der Drehachse entfernt. Die Spirale ist außen mit dem Uhrwerkgehäuse und innen mit der Unruhwelle und damit auch dem Profilrad verbunden.

Die Unruh stellt in einem Uhrwerk ein mechanisches schwingungsfähiges System, speziell einen Drehschwinger, dar, das aus einem drehbar gelagerten Massestück, dem Unruhring, und einer daran befestigten Spiralfeder besteht. Die restliche Uhrenmechanik ist über die Unruhwelle verbunden. In Abbildung 4 ist die Unruh und ihre unmittelbare Verbindung zum Profilrad dargestellt.

Beim Schwingungsvorgang werden potentielle Energie der Spiralfeder und kinetische Energie des Massestücks, die durch ihr Trägheitsmoment bedingt ist, periodisch abwechselnd ineinander umgewandelt. Man kann also von zwei sich abwechselnden Phasen sprechen, die zusammen einen Schwingungszyklus ausmachen. Es lässt sich durch physikalische Überlegungen zeigen, dass der Schwingungszyklus eine konstante Periode und damit Schwingungsfrequenz besitzt, wenn die Idealbedingungen der fehlenden Krafteinwirkungen, zu denen leider auch die allgegenwärtige Reibung zählt, erfüllt sind[1]. Diese Eigenschaft der auch unter realistischen Bedingungen fast konstanten Frequenz macht das Feder-Masse-System zu einem guten Ansatz für ein Gerät, dessen Bestimmung der Zeitmessung gilt.

2.3 Hemmung

In mechanischen Uhrwerken tragen Hemmungen dazu bei, die Drehrate und damit effektive Drehgeschwindigkeit ihres eignen Antriebs trotz variierenden Drehmoments konstant zu halten. Dies ist besonders bei Uhren, die durch Federkraft angetrieben werden, vonnöten, weil ihre Antriebsfedern mit dem Entspannen über die Zeit ein immer kleiner werdendes Drehmoment ausüben.

In dieser Arbeit soll eine spezielle Hemmung untersucht werden, die – wie sich nach erweiterter Recherche herausstellte – auch als „Tic Tac-Hemmung“ bekannt ist[2]. Im Wesentlichen setzt sie sich aus zwei Bestandteilen zusammen. Der erste ist ein gleichmäßig mit Zapfen versehenes Hemmungsrads, das letztendlich durch die Antriebsfeder bewegt wird. Die geschwindigkeitsregulierende Eigenschaft der Hemmung kommt durch das Zusammenspiel des Hemmungsrades mit dem zweiten Bestandteil, einem Rad, das zum Hemmungsrads hin ein spezielles Profil trägt und außerdem direkt mit der Unruh über ihre Unruhwelle verbunden ist, zustande. Dieses Profilrad wird durch das Hemmungsrads mit seinen Zapfen durchlaufen, wobei sie dessen Profil einzeln durchstreifen und so die Antriebsfeder mechanisch mit der Unruh verbinden. Dabei bestimmt das spezielle Profil den Kraftübertragungsfaktor¹ in Abhängigkeit von den Drehwinkeln der Räder.

¹Das ist – zugegeben – ein etwas schwammiger Ausdruck. Im Bezug auf die folgende mathematische Formulierung spiegelt er das Verhältnis der Drehmomente, die auf Hemmungsrads und Profilrad wirken, wider.

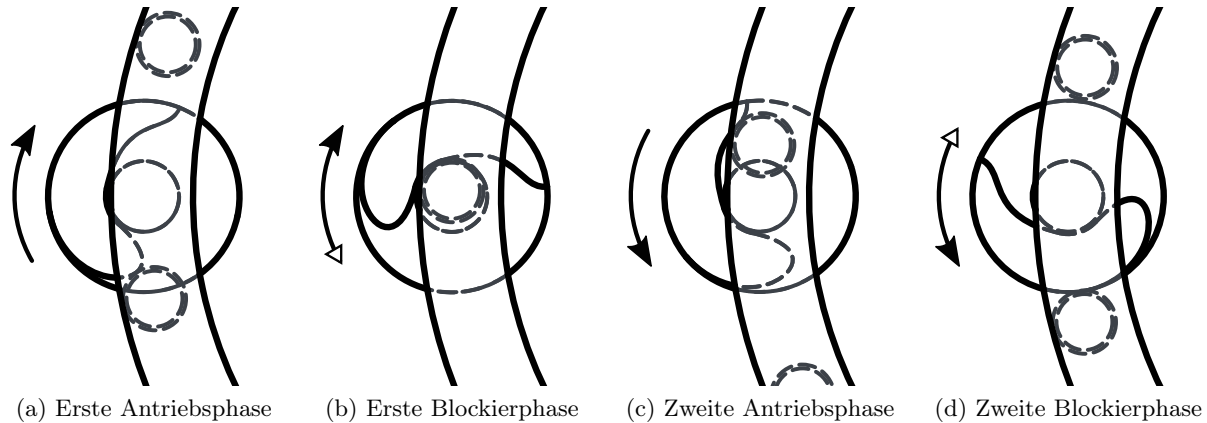


Abbildung 5: Phasen eines Schwingzyklus: Das Hemmungsrad dreht sich im Uhrzeigersinn. Pfeile zeigen die Drehrichtung des Profiltrades an, wobei ggf. die des weißen Pfeils der des schwarzen zeitlich folgt.

Sind gewisse Bedingungen erfüllt, durchläuft die Hemmung einen Zyklus von vier Phasen, der sich mit jedem Zapfen, der das Profil durchläuft, wiederholt. In der ersten Phase (Abbildung 5a) wird die Unruh durch das Hemmungsrad in eine Drehrichtung beschleunigt, dann befindet es sich in einem antreibenden Zustand. Danach wird in der zweiten Phase (Abbildung 5b) das Hemmungsrad blockiert, bis die Unruh nach dem Erreichen der maximalen Auslenkung, an der sich die Drehrichtung umkehrt, wieder ihre Ruhelage erreicht hat. Währenddessen befindet es sich in einem blockierten Zustand. Die letzten zwei Phasen (Abbildung 5c und 5d) verlaufen ähnlich, mit dem einzigen Unterschied, dass die Unruh in entgegengesetzte Drehrichtung beschleunigt wird. Weil das Hemmungsrad mit 12 Zapfen bestückt ist, dreht es sich pro Zyklus um einen Winkel von $\zeta = \frac{\pi}{6}$ in Bogenmaß.

Nun hat der Leser hoffentlich eine grobe Vorstellung vom Funktionsprinzip der vorliegenden Konstruktion, womit in den nächsten Abschnitten zur Problemstellung und den dazugehörigen mathematischen Überlegungen übergegangen werden kann.

3 Problemstellung

Wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, ist für diese Art der Hemmung das Profil des Profiltrades von maßgeblicher Bedeutung. Daher soll sie dahingehend untersucht werden, welche Eigenschaften eine ideale Funktion des Kraftübertragungsfaktors in Abhängigkeit von den Drehwinkeln² haben soll und wie sich die Kurve des speziellen Profils aus dieser Funktion berechnen lässt.

3.1 Anforderungen an das Profil

Bevor es an das eigentliche Ziel, die Kurve des Profils zu berechnen, geht, sollen als Vorbereitung einige Überlegungen angestellt werden, um klar zu machen, welche Eigenschaften des Profils wünschenswert sind.

Ein ideales Uhrwerk hat einen möglichst stabilen, d. h. regelmäßigen Gang und einen sehr geringen Abfallfehler. Dies ist nur dann erreichbar, wenn die Schwingungsbewegungen der Unruh so wenig wie möglich gestört werden, was durch möglichst kurze Phasen der Energieübertragung auf die Unruh nahe ihrem Nulldurchgang zu erreichen ist.[3]

Darüber hinaus wäre es wünschenswert, dass das Uhrwerk mit einem Aufziehvorgang möglichst lang läuft. Dazu sollen die Reibungsverluste gering gehalten werden und die Hemmung bei einer möglichst breiten Spanne an Drehmomenten arbeiten können.

²Die Drehwinkel lassen sich auf triviale Weise auch aus der Schwingphase, in der sich die Unruh befindet, berechnen.

4 Verschiedene Ansätze und ihre Ergebnisse

Um die Kurve für ein Profil zu finden, das meinen Ansprüchen genügt, zog ich verschiedene Ansätze in Betracht und verfolgte diese mehr oder weniger erfolgreich. Bevor ich dieses Problem mit mathematischen Methoden anging, versuchte ich durch Ausprobieren, eine zumindest funktionierende Kurve zu finden, denn ich wollte möglichst früh ein fassbares Ergebnis, d. h. ein funktionierendes, ausgedrucktes Uhrwerk, erzielen. Die ersten Prototypen der Hemmung richtete ich in FreeCAD[4], dem CAD-Programm meiner Wahl, mithilfe von Bézierkurven her[5, S. 37, 6, S. 6–7]. Erst später war ich bereit, mir ausführliche Gedanken darüber zu machen, um die Kurve des Profils zu optimieren.

4.1 Ansatz über isogonale Trajektorien im Polarkoordinatensystem

Nach dem überwiegend empirisch angelegten Ansatz besteht die nächste Herausforderung in einer mathematisch begründeten Konstruktion, d. h. die Profilkurve soll nach sinnvollen Bedingungen idealerweise eindeutig oder zumindest nach wohldefinierten Parametern berechnet werden können.

Um die Konstellation, in der sich die Räder der Hemmung befinden, zu formalisieren, hielt ich es zunächst für sinnvoll, die Kurven und Punkte des Systems aus einem Polarkoordinatensystem, dessen Pol die Drehachse des Profiltrades sein soll, zu betrachten. Dementsprechend ließe sich eine Profilkurve als Funktion des Radius in Abhängigkeit vom Winkel $r(\varphi)$ darstellen.

Angenommen, das Hemmungsrad sollte gar keine Kraft auf das Profiltrad übertragen, dann würde die Profilkurve mit der Bahnkurve des Hemmungsrades übereinstimmen. Die entscheidende Idee war, zu dieser „Nullkurve“, d. h. Profilkurve mit einem Kraftübertragungsfaktor von Null an jeder Stelle, eine isogonale Trajektorie zu berechnen. Diese sollte dann die Eigenschaft einer Profilkurve haben, bei der die Zapfen des Hemmungsrades stets den gleichen Winkel zu ihr beschreiben. Sollte das tatsächlich der Fall sein, könnte man eine weitere Funktion einführen, mit der sich eben diese Winkel in Abhängigkeit von den Drehwinkeln der Räder modulieren lassen, womit im Wesentlichen das Ziel, die Profilkurve nach wohldefinierten Parametern berechnen zu können, erreicht wäre.

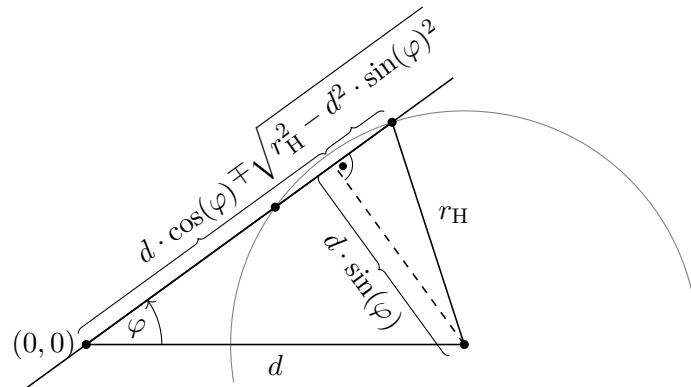


Abbildung 6: Geometrie zum verschobenen Kreis in Polarkoordinaten

Die Funktion der Nullkurve lässt sich nach einigen geometrischen Überlegungen, die in Abbildung 6 gezeigt sind, relativ leicht angeben:

$$r_0(\varphi) = d \cos(\varphi) \mp \sqrt{r_H^2 - d^2 \sin(\varphi)^2} \quad (1)$$

wobei r_H für den Radius des Hemmungsrades und d für den Mittelpunktsabstand zwischen ihm und dem Profiltrad steht. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass für das weitere Verfahren der positive Ast von r_0 gewählt wird, weil der negative im Spezialfall $d = r_H$ immer den Pol beschreibt,

also Null ist³, d. h. der gesamte Definitionsbereich von r_0 durch den positiven Ast abgedeckt ist. Abbildung 7 zeigt die Nullkurve r_0 , deren Parameter meiner Konstruktion entsprechen.

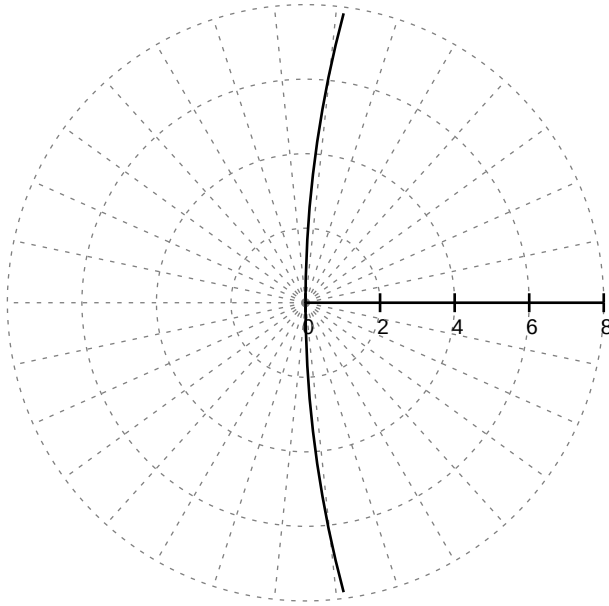


Abbildung 7: Die in Gleichung 1 angegebene Nullkurve mit $d = r_H = 30$, denn der Mittelpunkt des Profilrades ist 30 mm von dem des Hemmungsrades entfernt und ebenso groß ist der Radius des Kreises, auf dem sich die Zapfenmittelpunkte bewegen. Gezeigt ist die Funktion für $\varphi \in \left[\frac{\pi-\zeta/2}{2}; 2\pi - \frac{\pi-\zeta/2}{2} \right]$, sodass ihre Kurve nicht über das Profilrad hinaus geht.

Um nun die isogonale Trajektorie zu r_0 mit einem Winkel α zu berechnen, würde man – in einem kartesischen Koordinatensystem zumindest – direkt mithilfe des Additionstheorems für den Tangens⁴ die Steigungen an jeder Stelle um den Winkel vergrößern. Ich bin mir nicht sicher, ob man das auch so mit Polarfunktionen machen kann, aber ich versuchte es trotzdem, in der Hoffnung, dass Ableiten und Integrieren im Polarkoordinatensystem die Eigenschaften haben, die ich von ihnen erwartete.

Für die weitere Vorgehensweise muss man also zuerst die Steigungswinkel in Abhängigkeit von φ berechnen, was mit dem Arkustangens von der Ableitung gelingen dürfte:

$$\beta(\varphi) = \arctan(r'_0) = \arctan \left(d \cos(\varphi) - \frac{d^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\sqrt{r_H^2 - d^2 \cos(\varphi)^2}} \right) \quad (2)$$

Nun setzt man β sowie den konstanten Winkel α in das Additionstheorem ein und integriert, womit man eine Funktion erhalten sollte, die an jedem Punkt die gegebene Winkeldifferenz zur Nullkurve hat:

$$r(\varphi) = \int \frac{\tan(\alpha) + r'_0(\varphi)}{1 - \tan(\alpha) \cdot r'_0(\varphi)} d\varphi \quad (3)$$

mit einer Integrationskonstanten, sodass $r(0) = 0$. Es stellt sich heraus, dass sich in den seltensten Fällen auf analytische Weise eine Stammfunktion für isogonale Trajektorien finden lässt⁵, weshalb ich zum Berechnen der sich ergebenden Profilkurve auf das quelloffene Mathematikprogramm wxMaxima[9] zurückgriff. Dieses stellt eine Möglichkeit dar, Funktionen numerisch zu integrieren und mit einem Trick⁶ auch plotten zu lassen.

Ich ließ Kurven für verschiedene Winkel berechnen, aber der in Abbildung 8 gezeigte Plot verrät schon auf den ersten Blick, dass es sich dabei nicht um die gesuchte Kurve handelt, weshalb ich

³Der negative Ast von $r_0(\varphi)$ wird dann $r_H \cdot (\cos(\varphi) - \cos(\varphi)) = 0$, während der positive zu $r_H \cdot (\cos(\varphi) + \cos(\varphi)) = 2r_H \cos(\varphi)$ wird.

⁴ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$ [7]

⁵In diesem Fall versuchte ich das erst von Hand, dann mit GeoGebra[8] und wxMaxima, beides mit Misserfolg, teilweise sogar mit Programmabstürzen verbunden.

⁶Aus irgendwelchen Gründen erlaubt es wxMaxima nicht, numerisch integrierte Funktionen direkt zu plotten. Man kann aber die Operation der numerischen Integration in einen Lambdaausdruck verpacken, der die Werte an den Plotter weitergibt. Das klingt zwar absurd, funktioniert aber tatsächlich.

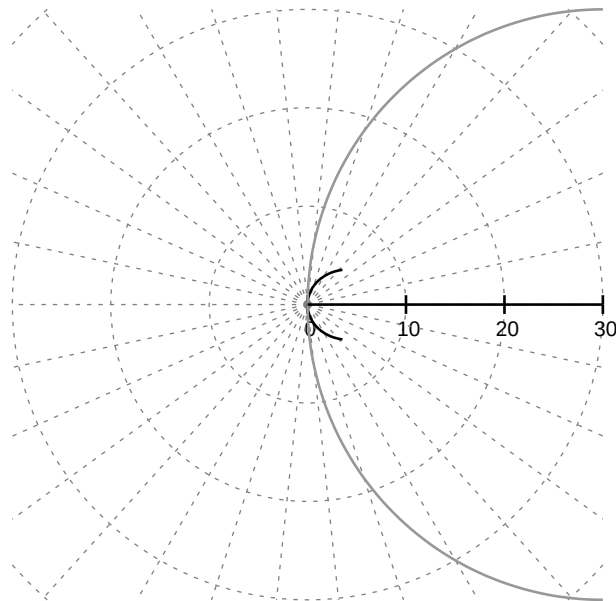


Abbildung 8: Ausgangskurve (grau) und ihre numerisch berechnete isogonale Trajektorie (schwarz) bei einer Winkeldifferenz von -10° im Polarkoordinatensystem: Wahrscheinlich liefert sie nicht das erwünschte Ergebnis, denn die Tangenten der beiden Kurven haben an Schnittpunkten mit den gleichen vom Pol ausgehenden Strahlen nicht immer die gleiche Winkeldifferenz. Besonders die Punkte nahe dem Pol seien zur Verdeutlichung hervorgehoben.

weitere Gedanken zu diesem Ansatz erst mal nicht weiterverfolgte. Vermutlich ist der Misserfolg darauf zurückzuführen, dass meine zweifelhafte Annahme, dass isogonale Trajektorien durch meine Vorgehensweise bei Polarfunktionen Sinn ergeben, falsch ist. Ich werde mir also für die Ergebnisse dieses Ansatzes aufgrund theoretisch gerechtfertigter Bedenken ersparen, ein entsprechendes Profilrad zu drucken und am Uhrwerk zu testen.

4.2 Drehmomentverhältnis mithilfe von Geometrie und Analysis

Als ich wieder viel Freizeit hatte, versuchte ich mich noch einmal an dem Problem. Bei diesem Ansatz wird zunächst die Radkonstellation in einem kartesischen Koordinatensystem wie in Abbildung 9 als verkettete Drehung formalisiert, wobei dieses sich mit dem Profilrad dreht. Sinnvollerweise ist der Ursprung des Koordinatensystems gleichzeitig das Drehzentrum der ersten Drehung, die durch den Winkel α , um den die Mechanik um das Profilrad herum geneigt ist, beschrieben wird. Die so geneigte Mechanik beinhaltet wiederum das Hemmungsrads, dessen Drehwinkel mit β bezeichnet wird.

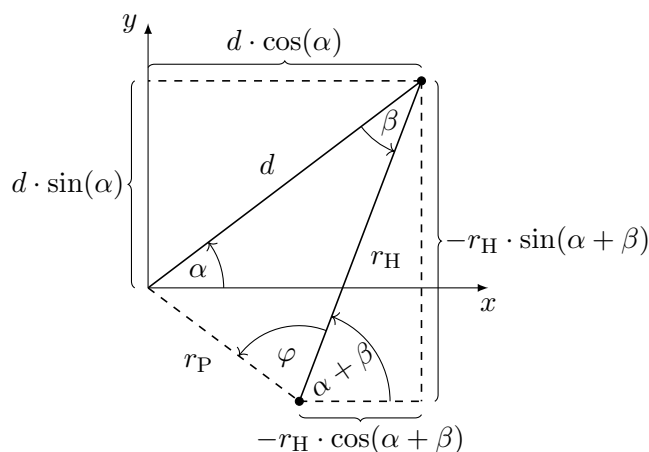


Abbildung 9: Winkel und Strecken der neuen Betrachtung: Die gestrichelte Linie r_P entspricht dem Radius des Profils an der Kontaktstelle desselben mit einem Zapfen am Hemmungsrads. Diese ist abhängig von den Winkeln α und β .

Nun lässt sich in diesem Koordinatensystem eine parametrische Kurve definieren, auf der ein Zapfen vom Profilrad aus betrachtet dasselbe durchläuft und die von dem Drehwinkel des Hem-

mungsrades abhängt:

$$\vec{p}(\beta) = \begin{pmatrix} d \cos(\alpha(\beta)) - r_H \cos(\alpha(\beta) + \beta) \\ d \sin(\alpha(\beta)) - r_H \sin(\alpha(\beta) + \beta) \end{pmatrix} : \beta \in \left[-\frac{\Delta\beta}{2}; \frac{\Delta\beta}{2} \right] \quad (4)$$

d ist dann der Abstand zwischen Hemmungsrad- und Profiltradmittelpunkt, r_H der Radius des Hemmungsrades, $\alpha(\beta)$ eine Funktion, die den umgekehrten⁷ Drehwinkel des Profiltrades festlegt und $\Delta\beta = \zeta$ steht für den Winkel zwischen zwei Zapfen auf dem Hemmungsrad, was bedeutet, dass die Betrachtung für genau einen Schwingungszyklus gilt.

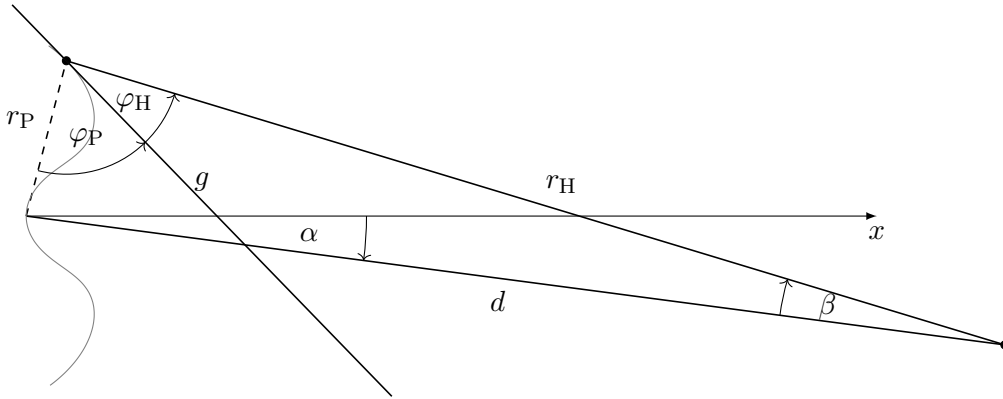


Abbildung 10: Kräfteaufteilung an der Kurventangente: Die vom Hemmungsrad auf das Profiltrad gegen den Uhrzeigersinn wirkende Tangentialkraft wird an der Profiltangente g aufgeteilt, sodass dieses in die gleiche Drehrichtung gezwungen, d. h. α kleiner wird.

Diese Form erweist sich als ein äußerst nützliches Werkzeug zum Festlegen weiterer Parameter der Kurve, wie eben des Kräfteübertragungsfaktors. Dazu ist es nötig, an der Stelle des Berührungspunktes von Zapfen und Profiltrad die Winkel zwischen der in Abbildung 10 eingezeichneten Tangente des Profils und den Strecken r_H bzw. r_P , die den Berührungspunkt mit ihren Drehzentren verbinden, zu bestimmen. Diese Winkel φ_H und φ_P werden letztendlich für eine Kräfteaufteilung benötigt, sodass das Verhältnis der Drehmomente von Hemmungs- und Profiltrad für eine gegebene Funktion $\alpha(\beta)$ angegeben bzw. ein α mit gegebenen Drehmomentverhältnissen gefunden werden kann. Für die Tangente an einem bestimmten Drehwinkel β lässt sich mit dem intelligenten Arkustangens⁸ durch den Quotienten der Ableitungen von y- und x-Komponente ein Steigungswinkel angeben:

$$p'_y(\beta) = d \cdot \alpha'(\beta) \cdot \cos(\alpha(\beta)) - r_H \cdot (\alpha'(\beta) + 1) \cdot \cos(\alpha(\beta) + \beta) \quad (5)$$

$$p'_x(\beta) = -d \cdot \alpha'(\beta) \cdot \sin(\alpha(\beta)) + r_H \cdot (\alpha'(\beta) + 1) \cdot \sin(\alpha(\beta) + \beta) \quad (6)$$

$$\delta_T(\beta) = \arctan2 \left(\frac{p'_y(\beta)}{p'_x(\beta)} \right) = \arctan2 \left(\frac{d \cdot \alpha'(\beta) \cdot \cos(\alpha(\beta)) - r_H \cdot (\alpha'(\beta) + 1) \cdot \cos(\alpha(\beta) + \beta)}{-d \cdot \alpha'(\beta) \cdot \sin(\alpha(\beta)) + r_H \cdot (\alpha'(\beta) + 1) \cdot \sin(\alpha(\beta) + \beta)} \right) \quad (7)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Winkel relativ zur x-Achse des Koordinatensystems gemessen ist.

Die mit dem Drehzentrum des Hemmungsrades verbundene Strecke r_H besitzt einen Winkel, den man nach Abbildung 9 direkt angeben kann: $\delta_H = \alpha + \beta$, womit für den Winkel zwischen r_H und der Tangente g gilt:

$$\varphi_H = \delta_T - \delta_H = \delta_T - \alpha - \beta \quad (8)$$

⁷Eine positive Drehrichtung der Mechanik *im* Koordinatensystem bedeutet eine negative Drehrichtung *des* Koordinatensystems und damit des Profiltrades.

⁸Der intelligente Arkustangens zeichnet sich dadurch aus, dass er aus Zähler und Nenner des „Bruches“ (das sind dann die Argumente) den korrekten Winkel berechnet, der nicht nur Element aus $]-\pi; \pi[$ ist. Ein Beispiel: $\arctan2 \left(\frac{1}{-1} \right) = 3\pi/4$, während $\arctan(-1) = -\pi/4$.

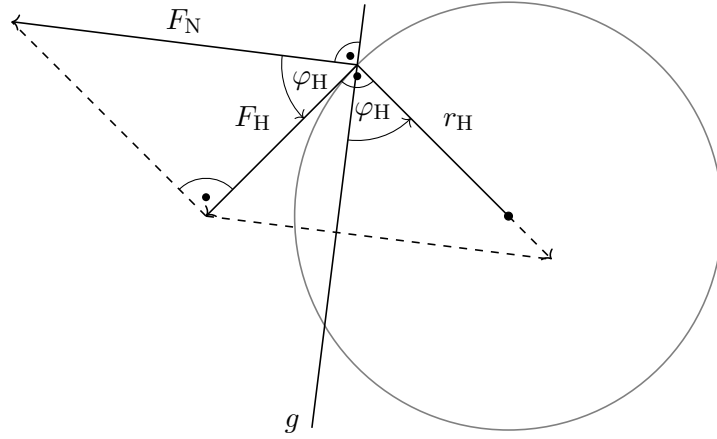


Abbildung 11: Kräfteaufteilung an der Geraden g , die Profilkurventangente ist, am Hemmungsrad

Für die andere, mit dem Profiltrad verbundene Strecke r_P , findet man zu g einen Winkel mithilfe des Sinussatzes, wenn man vorher ihre Länge gefunden hat. Diese ist durch den Satz des Pythagoras gegeben:

$$r_P = \sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2} \quad (9)$$

Und schließlich lässt sich der Sinussatz ausnutzen, wenn man bedenkt, dass der gesuchte Winkel φ_P durch den d gegenüberliegenden Winkel $\varphi = \varphi_P + \varphi_H$ bestimmt ist. Es gilt:

$$\frac{\sin(\varphi_P + \varphi_H)}{d} = \frac{\sin(\beta)}{r_P} \quad (10)$$

$$\varphi_P = \arcsin\left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right) - \varphi_H \quad (11)$$

$$= \arcsin\left(\frac{d \sin(\beta)}{\sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2}}\right) - \delta_T + \alpha + \beta \quad (12)$$

Aus den Winkeln, die jetzt bekannt sind, kann man schließlich den Kraftübertragungsfaktor berechnen, aus dem unmittelbar das Verhältnis der Drehmomente folgt. Bei dieser Hemmung wird die tangential zur Bahn, d. h. senkrecht zum Radius des Hemmungsrades wirkende Kraft F_H zuerst in eine Komponente F_N zerlegt, die senkrecht zur Profilkurventangente und damit parallel zu ihrer Normalen steht. Anhand des Kräftediagramms in Abbildung 11 kann man sich davon überzeugen, dass diese beiden Kräfte der Beziehung

$$F_H = F_N \cos(\varphi_H) \quad (13)$$

genügen, wenn $\varphi_H = \delta_T - \delta_H$ den Winkel zwischen Hemmungsradradius und Profilkurventangente bezeichnet. Nach diesem Zwischenschritt lässt sich die gesuchte Kraft bestimmen, nämlich die tangential zur Kreisbahn des Profiltrades wirkende Kraft. Bei dieser Zerlegung handelt es sich um die gleiche wie bei der ersten im Zwischenschritt, mit dem einzigen Unterschied, dass dieses Mal die Kraft entlang der Normalen bekannt und die tangential wirkende Kraft unbekannt ist. Mit anderen Worten ausgedrückt: bei der zweiten Zerlegung gilt die gleiche Formel, wobei $F_N = F_N$, $F_H = F_P$ und $\varphi_H = \varphi_P$, sodass man nach dem Einsetzen die folgende Beziehung erhält:

$$F_P = F_N \cos(\varphi_P) \quad (14)$$

Jetzt kann man die beiden Gleichungen durcheinander teilen und erhält die Formel für den Kraftübertragungsfaktor bei gegebenen Winkeln:

$$\frac{F_H}{F_P} = \frac{\cos(\varphi_H)}{\cos(\varphi_P)} \quad (15)$$

Der letzte Schritt zum Verhältnis der Drehmomente besteht darin, die Definition nach Kraft umzustellen und einzusetzen:

$$F = \frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{M_H}{r_H}}{\frac{M_P}{r_P}} = \frac{\cos(\varphi_H)}{\cos(\varphi_P)} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_H}{M_P} = \frac{r_H \cos(\varphi_H)}{r_P \cos(\varphi_P)} \quad (16)$$

Nun liegt es nur noch daran, beide Winkel einzusetzen, womit sich eine Funktion des Drehmomentverhältnisses in Abhängigkeit von β und vor allem der Funktion α ergibt:

$$\eta(\beta) = \frac{M_H}{M_P} = \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_T - \delta_H)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right) - \delta_T + \delta_H\right)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Rekursives Einsetzen von } r_P \text{ und allen } \delta; \\ \cos(x) = \cos(-x) \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$= \frac{r_H}{\sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2}} \cdot \frac{\cos\left(\arctan2\left(\frac{d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\alpha + \beta)}{-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\alpha + \beta)}\right) - \alpha - \beta\right)}{\cos\left(\arctan2\left(\frac{d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\alpha + \beta)}{-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\alpha + \beta)}\right) - \arcsin\left(\frac{d \sin(\beta)}{\sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2}}\right) - \alpha - \beta\right)} \quad (18)$$

Wie dem aufmerksamen Leser nach einigen algebraischen Umformungen im Kopf sicherlich nicht entgangen ist, gilt tatsächlich $\eta(\beta) = -\alpha'(\beta)$. Wem diese Beziehung nicht offensichtlich vorkommt, möge bitte zu Stift und Papier greifen, um diese als kleine Übung zu beweisen.

Die „kleine Übung“ war natürlich eine maßlose Untertreibung für das, was nötig ist, um darauf zu kommen; ich bitte daher des Scherzes wegen um Entschuldigung. Bevor ich überhaupt auf die Idee kam, diese Annahme zu prüfen, hatte ich mir die Funktionen $\alpha(\beta)$ und $\eta(\beta)$ von GeoGebra plotten lassen, woraufhin mir auffiel, dass letztere verdächtige Ähnlichkeit zur Ableitung von der ersteren aufweist: Und tatsächlich, Abziehen von $-\alpha'$ ergibt Null für alle β im Plotbereich! Von dieser bemerkenswerten Eigenschaft der Drehmomentverhältnisfunktion motiviert, griff ich selbst zu Stift und Papier (erst A4, aus Platzmangel schließlich A3), um mithilfe verschiedener trigonometrischer Identitäten meine Annahme zu beweisen. Aufgrund der Tatsache, dass die letzten Schritte aus Umformungen von extrem langen Brüchen, die den Platz und Rahmen dieses Hauptteils sprengen, bestehen, will ich mich hier auf das Resultat beschränken. Die vollständige Rechnung in Anhang A zeigt, dass der komplizierte Term für $\eta(\beta)$ bis auf

$$\eta(\beta) = -\alpha'(\beta) \quad (19)$$

heruntergekürzt werden kann, was meinen anfänglichen Verdacht bestätigt. Aus dieser Erkenntnis lässt sich der eigentlich erstaunlich triviale⁹ Schluss ziehen, dass das momentane Drehmomentverhältnis bei dem Drehwinkel des Hemmungsrades β exakt durch die Ableitung der Funktion $-\alpha(\beta)$, die den Drehwinkel des Profiltrades in Abhängigkeit zu dem des Hemmungsrades angibt¹⁰, gegeben ist.

4.3 Bestätigung des Ergebnisses durch physikalische Betrachtungen

Die vorgestellte Hemmung ist eine Form der mechanischen Energieübertragung, die das Energieerhaltungsgesetz einhält. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die gesamte Dreharbeit, die das Hemmungsrade verrichtet, auch am Profiltrad erscheint. Wie auch bei vielen anderen Problemen der Physik üblich, lässt sich die Tatsache, dass Energie weder von außerhalb des Systems

⁹Dasselbe folgt nämlich auch aus einfachen Betrachtungen unter Berücksichtigung der Energieerhaltung, wie später noch gezeigt wird.

¹⁰ $\alpha(\beta)$ selbst gibt den Drehwinkel des Uhrwerkes zum Profiltrad an, daher ist $-\alpha(\beta)$, also mit negativem Vorzeichen, der Drehwinkel des Profiltrades zum Uhrwerk. Diese Angelegenheit ist – wie so oft bei mathematischen Modellen – eine Frage der Wahl des Koordinatensystems.

zugeführt wird noch aus demselben nach außen entweicht, zur Analyse des Systems ausnutzen. Allgemein ist Energie als Kraft über Strecke, also

$$E = \int F(s) ds \quad (20)$$

definiert. Im Spezialfall der Hemmung wird Dreharbeit am Hemmungsrad in Dreharbeit am Profiltrad umgewandelt. Diese ergibt sich Zusammen mit den Definitionen des Drehmoments $M = F \cdot r$ und des Winkels $\varphi = \frac{s}{r}$:

$$E_D = \int \frac{M(s)}{r} ds = \int M\left(\frac{s}{r}\right) d\frac{s}{r} = \int M(\varphi) d\varphi \quad (21)$$

, also sinnvollerweise Drehmoment über Drehwinkel.

Als erstes betrachtet man nun die vom Hemmungsrad abgegebene Energie ΔE_H bei der Drehung von einem beliebigen Startwinkel σ bis zum Endwinkel β :

$$\Delta E_H = \int_{\sigma}^{\beta} M_H(\varphi) d\varphi \quad (22)$$

Die vom Profiltrad aufgenommene Energie ΔE_P beträgt dann, wenn dieses sich von seinem Startwinkel $-\alpha(\sigma)$ zum Endwinkel $-\alpha(\beta)$ gedreht hat¹¹:

$$\Delta E_P = \int_{-\alpha(\sigma)}^{-\alpha(\beta)} M_P(\varphi) d\varphi \quad (23)$$

Diese gleicht also – man möge dem Energieerhaltungssatz Glauben schenken – der vom Hemmungsrad abgegebenen Energie, d. h. $\Delta E_H = \Delta E_P$:

$$\int_{\sigma}^{\beta} M_H(\varphi) d\varphi = \int_{-\alpha(\sigma)}^{-\alpha(\beta)} M_P(\varphi) d\varphi \quad \left| \frac{d}{d\beta} \right. \quad (24)$$

Weil es sich bei diesem Ausdruck um eine Gleichung handelt, darf man auf beiden Seiten die gleiche Operation durchführen, ohne Bedenken zu haben, die Gültigkeit ihrer Aussage dadurch einzuschränken. Hier führt Ableiten beider Seiten nach β zum Ziel, wobei zu beachten ist, dass das Energieintegral zum Hemmungsrad durch die Funktion α begrenzt wird, weshalb die Kettenregel angewendet werden muss:

$$M_H(\beta) = -M_P(-\alpha(\beta)) \cdot \alpha'(\beta) \quad | : M_P \quad (25)$$

$$\frac{M_H}{M_P} = \eta(\beta) = -\alpha'(\beta) \quad (26)$$

, was das Ergebnis des letzten Ansatzes bestätigt: Das momentane Drehmomentverhältnis von Hemmungsrad zu Profiltrad am Drehwinkel β ist durch die Ableitung der Drehwinkelfunktion $-\alpha(\beta)$ gegeben. Man kann also eine Profilkurve, die an einem Drehwinkel β ein bestimmtes Drehmomentverhältnis aufweist, finden, indem man die Drehmomentverhältnisisfunktion $\eta(\beta)$ integriert, womit man zunächst eine entsprechende Drehwinkelfunktion α erhält:

$$\eta(\beta) = -\alpha'(\beta) \quad (27)$$

$$\Rightarrow - \int_0^{\beta} \eta(b) db = \alpha(\beta) \quad (28)$$

Diese setzt man in die durch Gleichung 4 definierte parametrische Kurve p ein. Es gilt folglich:

$$\vec{p}_{\eta}(\beta) = \left(d \cos\left(-\int_0^{\beta} \eta(b) db\right) - r_H \cos\left(\beta - \int_0^{\beta} \eta(b) db\right) \right) : \beta \in \left[-\frac{\Delta\beta}{2}; \frac{\Delta\beta}{2} \right] \quad (29)$$

¹¹Weil α den Drehwinkel des Uhrwerkes um das Profiltrad herum in Abhängigkeit von dem des Hemmungsrades beschreibt, müssen Start- und Endwinkel des Profiltrades $-\alpha$ sein.

Mit diesem Ergebnis ist das Problem eigentlich schon so gut wie gelöst – es muss lediglich eine Funktion η definiert werden, die den Anforderungen entspricht, d. h. u. a. nahe $-\frac{\Delta\beta}{2}$ und Null eine angemessene Steigung aufweist. Bevor sich die schließlich errechnete Kurve jedoch auf ein echtes Profiltrad übertragen lässt, muss noch eine Kleinigkeit, die aber nicht weniger wichtig ist, berücksichtigt werden: Bisher sind die Modelle des Hemmungsmechanismus von einem mathematischen Punkt als Zapfen ausgegangen. Tatsächlich hat er aber einen endlich kleinen Radius, nämlich einen von 2 mm vor Abzug der Toleranz, die beim Herstellungsprozess zu berücksichtigen ist. In meinem Fall – es handelt sich um einen FDM-3D-Drucker – haben sich 0,15 mm bewährt.

5 Anwendung der berechneten Kurve auf ein reales Profiltrad durch Parallelkurven

Es hat sich herausgestellt, dass sich die durch das mathematische Modell berechnete Kurve nicht direkt auf ein reales Profiltrad anwenden lässt. Wünschenswert wäre eine neue Kurve, deren Punkte im Vergleich zur alten Kurve in eine Richtung „verschoben“ sind, ohne dass die Tangentenwinkel sich ändern: Für jedes β soll δ_T auf der alten Kurve dem Tangentenwinkel entsprechen, der am Berührungspunkt des kreisförmigen Hemmungsradzapfens¹² mit der Kurve anfällt.

Die neue Kurve muss also für jedes β eine parallele Tangente zur alten Kurve haben, deren senkrechter Abstand dem Hemmungsradzapfenradius entspricht. Eine solche lässt sich aus parametrischen Kurven berechnen, indem man die Tangente berechnet und dazu die auf den gewünschten Abstand skalierte Senkrechte bildet.

Tangentenvektor einer parametrischen Kurve $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$\dot{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Senkrechte:

$$\dot{\vec{f}}_{\perp} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Normiert und mit Abstand a skaliert:

$$\vec{v}_a = \frac{\dot{\vec{f}}_{\perp}}{\|\dot{\vec{f}}_{\perp}\|} \cdot a \quad (32)$$

Jeder Punkt von \vec{f} um \vec{v}_a verschoben:

$$\vec{f}_a(t) = \vec{f}(t) + \vec{v}_a \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}_a(t) = \begin{pmatrix} x(t) - \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot a \\ y(t) + \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot a \end{pmatrix} \quad (34)$$

Bei erweiterter Recherche für diese Arbeit stellte sich heraus, dass solche Kurven – wie die Haupteigenschaft derselben schon suggeriert – als Parallelkurven bezeichnet werden[10].

Dass diese zusammen mit runden Zapfen im Allgemeinen hinsichtlich der Drehmomentverhältnissfunktion η trotz Änderung des Berührungspunktes äquivalent zum mathematischen Modell

¹²Die Hemmungsradzapfen sind eigentlich nicht kreis- sondern kegelstumpfförmig, weil das die Reibung durch Minimierung der Kontaktfläche verringert. In der zweidimensionalen Projektion, die zur Berechnung der Kurve völlig ausreicht, sind die Hemmungsradzapfen aber kreisförmig.

des punktförmigen Zapfens sind, lässt sich am leichtesten damit erklären, dass Parallelkurven der Profilkurve keine Änderung der Bahn des Zapfens relativ zum Profiltrad bewirken. Das bedeutet, dass sie auch $\alpha(\beta)$ nicht verändern, weshalb $-\alpha'(\beta)$ ebenfalls unverändert bleibt. Wie die physikalische Betrachtung auch unabhängig von der Hemmungsgeometrie bestätigt, ist dies genau $\eta(\beta)$, das also ebenfalls Parallelkurveninvariant ist.

Nun bleibt ein letztes theoretisch zu behandelndes Problem offen, das zunächst in Abbildung 12 aufgezeigt werde. Die Besonderheit liegt darin, dass sich die Kurve selbst überschneidet, was zunächst nicht unbedingt problematisch zu erscheinen mag: Schließlich steht dem Konstrukteur frei, nur die Punkte vor und nach dem Schnittpunkt zu wählen. Allerdings würde dann die Bewegungsbahn des Hemmungsradszapfenmittelpunktes sich von der vorgesehenen unterscheiden. Das hätte zur Folge, dass das reale Profiltrad stark vom mathematischen Modell abweicht, am realen Profiltrad $\eta(\beta)$ also nicht mehr für alle β gilt, weshalb solche Kurven zu vermeiden sind. In der Abbildung ist diese Abweichung durch den gestrichelten Kreisbogen dargestellt.

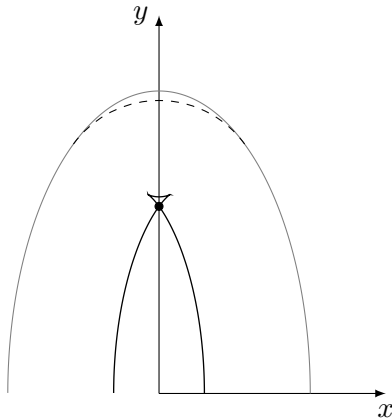


Abbildung 12: Außen liegende Ellipsenkurve und eine dazugehörige Parallelkurve, bei der es aufgrund starker Krümmung und großen Abstandes zu Singularitäten kommt. In diesem Beispiel manifestieren sie sich nahe der y-Achse. Kommt die Kurve dennoch an einem Profiltrad zum Einsatz, weicht die Bahnkurve des Zapfens ab, weil er kreisförmig an der als Punkt dargestellten Kurvenspitze abrollt.

Die Tatsache, dass Singularitäten auftreten, wenn ein gewisses Maximum an Krümmung oder Abstand überschritten wird, wirft nämlich die Frage nach der qualitativen Bestimmung dieses Maximums auf: Unter genau welchen Umständen kommt es zu Unstetigkeiten in der Parallelkurve?

Um diese Frage zu beantworten, ist es sinnvoll, sich über Spezialfälle Gedanken zu machen.

Betrachtet man eine Kreisfunktion mit einem gewissen Radius und dessen Parallelkurve, fällt auf, dass es einen Abstand a gibt, sodass alle Punkte dieser Kreisfunktion auf einen einzigen abgebildet werden. Vergrößert man von da aus den Abstand, entsteht wieder ein Kreis, der aber „umgestülpt“ ist und gegenläufig zur ursprünglichen Kreisfunktion gezeichnet wird, weil ihre Punkte vom Mittelpunkt aus betrachtet gegenüber liegen. Diese Beobachtung lässt sich auf andere stetige Funktionen übertragen: Wenn man jeden Punkt der Funktion durch einen Kreis annähert, d. h. ihre Krümmung bestimmt, ändert sich am betrachteten Punkt die Zeichenrichtung abrupt, wenn der Parallelkurvenabstand a den Krümmungsradius der Ausgangskurve unterschreitet, und eine Singularität manifestiert sich eben in einer solchen Richtungsänderung. Das bedeutet, dass derartige Singularitäten, die in der Praxis unerwünscht sind, genau dann auftreten, wenn die Ausgangskurve in Richtung der Parallelkurve gekrümmt ist und der Betrag ihres Krümmungsradius den des Parallelkurvenabstands unterschreitet.

Nun lässt sich diese Bedingung rechnerisch überprüfen, indem man den Krümmungsradius der Ausgangskurve berechnet. Ihre Definition lässt sich aus der des Kreisradius ableiten. Dieser ist gegeben durch den Quotienten des Gesamtwinkels¹³ und der Bogenlänge des Kreises. Für Kreis-sektoren gilt verallgemeinernd:

$$r = \frac{l}{\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \quad (35)$$

Dabei bezeichnet l die Bogenlänge und α den Kreissektorwinkel. Dasselbe gilt für Bogenlängen ds und infinitesimale Winkel $d\theta$.

¹³Oder der Bogenlänge des Einheitskreises

Schließlich kann man diese Gleichung auf Funktionen anwenden, indem man Strecken- und Winkeländerung an einem Punkt der Funktion bestimmt. Die Strecken-, d. h. Bogenlängenänderung, kann man recht einfach über das Wegintegral berechnen:

$$s = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (36)$$

$$\frac{ds}{dt} = \left(\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \right)' = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (37)$$

Für die Winkeländerung lässt sich der Akustangens des Tangentenwinkels verwenden:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\arctan \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \right)' = \frac{\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)' \cdot \dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (38)$$

Eingesetzt in Gleichung 35:

$$r(t) = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \quad (39)$$

Das ist der Krümmungsradius einer parametrischen Funktion in Abhängigkeit vom Parameter t , was einem lediglich die Aufgabe überlässt, im gegebenen Intervall Maxima und Minima dieser Funktion zu untersuchen und ggf. die Ausgangskurve zu korrigieren, sodass die Krümmungsradien unter dem Parallelkurvenabstand liegen.

6 Messreihe zum Vergleich der Ansätze

Um zu überprüfen, ob die mathematisch optimierten Profilkurven bessere Eigenschaften haben als empirisch bestimmte, bietet es sich an – gerade weil das Uhrwerk vollständig 3D-druckbar ist – Profilträder mit zu vergleichenden Kurven herzustellen und eine Messreihe durchzuführen.

6.1 Verfahren zur Aufnahme der Messreihe

Nach der Wahl von geeigneten Testkandidaten können mithilfe eines speziellen Verfahrens Messdaten generiert werden, die zur Charakterisierung des Uhrwerkanges dienen: Das Ticken des Uhrwerkes lässt sich als Indikator für den Beginn der Blockierphasen ausnutzen, denn diese beginnt damit, dass ein Hemmungsradzapfen ruckartig angehalten wird. Dabei kommt das besagte Geräusch zustande, das dann per Mikrophon aufgezeichnet werden kann.

Praktisch bedeutet das: Man zückt das Smartphone, zieht das Uhrwerk auf¹⁴ und startet die Aufnahme. Sobald es aufhört, sich zu bewegen, ist die Messreihe abgeschlossen und die Aufnahme wird beendet. Dabei stellte ich den Anfangszustand des Uhrwerkes so ein, dass das erste Klicken in der Aufnahme beim Übergang der Hemmung in die zweite Blockierphase (Abbildung 5d) entstand¹⁵. Damit steht nun eine Audio-Datei zur Verfügung, die ausschließlich zu Beginn jeder Blockierphase jeweils ein Klickgeräusch enthält und mithilfe von Analysewerkzeugen, darunter Audacity[11], statistisch ausgewertet werden kann.

Auch wenn das Verfahren zur Aufnahme der Messreihe an sich unkompliziert klingt, sieht die Praxis wieder Schwierigkeiten vor: Es kann nämlich sein, dass das Uhrwerk trotz unverändertem Profiltrad bei einer gewissen Ausrichtung im Raum gut läuft, nach einer geringfügigen Änderung der Ausrichtung aber gar keine Schwingung mehr zustande kommt. Das Problem ist die Reibung der bewegten Uhrwerkteile, die von sehr vielen Faktoren abhängt. Je nachdem, wie das Uhrwerk gehalten wird, gibt es vermutlich aufgrund der Schwerkraft an verschiedenen Stellen in verschiedenen Zuständen der Mechanik mehr oder weniger Reibung. Dadurch ist der Versuch nicht sehr gut reproduzierbar. Ich musste beim Messen die optimale Ausrichtung des Uhrwerks im Raum empirisch bestimmen.

¹⁴Das Uhrwerk wird für jede Messreihe gleich weit aufgezoogen.

¹⁵Die erste Halbperiodendauer ist also der Zeitabschnitt des Übergangs der Hemmung von der zweiten Blockierphase in die erste.

6.2 Auswertung der Daten

Aus den (Halb-)Periodendauern lassen sich das arithmetische Mittel und sowohl die absolute als auch relative Mittelabweichung berechnen. Diese Werte sind in Tabelle 1 aufgeführt, um die Leistungsfähigkeit der Profilträder des empirischen Ansatzes mit derjenigen des mathematisch berechneten vergleichen zu können.

Tabelle 1: Statistische Auswertung der Messdaten

	E = empirischer Ansatz; M = mathematischer Ansatz					
	1. Halbperiode		2. Halbperiode		Periode	
	E	M	E	M	E	M
Mittel	0,24 s	0,28 s	0,26 s	0,31 s	0,51 s	0,60 s
Mittelabweichung	0,02 s	0,02 s	0,03 s	0,02 s	0,03 s	0,02 s
Relative Abweichung	6,87 %	5,43 %	10,60 %	5,20 %	6,17 %	4,09 %

Als erstes fällt auf, dass die durchschnittlichen (Halb-)Periodendauern unterschiedlich sind; das berechnete Profiltrad bewirkt eine Unruhschwingung niedrigerer Frequenz. Allein das deutet schon darauf hin, dass die Hemmung mit empirischem Profiltrad durch übermäßige Krafteinwirkung eine zu hohe oder die Hemmung mit berechnetem Profiltrad durch übermäßige Reibung eine zu niedrige Frequenz der Unruhschwingung erzwingt; mindestens ein Profiltrad bewirkt eine Schwingungsfrequenz der Unruh, die deutlich von der ihrer Eigenfrequenz entfernt liegt.

Dass die (relative) Mittelabweichung des berechneten Profiltrades geringer ist, legt nahe, dass das berechnete Profiltrad für einen regelmäßigeren Gang sorgt, also hat es in dieser Hinsicht bereits die erhoffte Verbesserung erzielt. Die wichtigsten Erkenntnisse aus der erweiterten Datenanalyse in Anhang B sind, dass der Einsatz des berechneten Profiltrades einen länger währenden, regelmäßigeren und weniger fehlerbehafteten Gang des Uhrwerkes zufolge hat als das empirisch ermittelte Profiltrad, das die Schwingungsbewegung der Unruh stärker stört, sodass die Schwingungsfrequenz deutlich höher als die Eigenfrequenz der Unruh ist, dafür aber die Schwingung über eine größere Kräftespanne erhält.

7 Ausblick

Der letzte Ansatz ist in Kombination mit Parallelkurven eine zumindest theoretisch befriedigende Lösung für das Problem der Kurvenberechnung. Auch praktisch stellt sich das Ergebnis als zufriedenstellend heraus, denn die Messreihe kann bestätigen, dass die berechnete Kurve für einen regelmäßigeren Gang des Uhrwerkes sorgt; für weitere Details zur Messreihe siehe auch [6, S. 12–15].

Wie zuvor beschrieben ist dabei allerdings die Reproduzierbarkeit durch unregelmäßige Reibungseffekte begrenzt. Dieses Problem soll in noch ausstehenden Versuchen mit einem neuen Material der Firma IGUS Berücksichtigung finden; erste Vorversuche deuten darauf hin, dass damit die Leistung des Uhrwerkes sowie die Reproduzierbarkeit der Messreihe gesteigert werden kann.

Darüber hinaus ist noch ein theoretischer Aspekt dieses Projektes offen: Die ursprüngliche Drehmomentverhältnisfunktion entspricht nur genau der Ableitung von $-\alpha$, wenn die Parameter d und r_H spezielle Wertebereiche annehmen. Demnach ist es scheinbar widersprüchlich, dass sich beim Umformen die Unabhängigkeit der Funktion von den beiden Parametern herausstellt. Nach meinem aktuellen Erkenntnisstand hängt dieser Umstand damit zusammen, dass die trigonometrischen Umkehrfunktionen, speziell der beim Sinussatz auftretende Arkussinus, eigentlich mehrere Lösungen haben und in den besagten Wertebereichen die Standardlösungen nicht den korrekten Winkeln entsprechen. Beim Umformen gehen jedoch solche Details verloren, weil ich Umkehrfunktionen von Funktionen als gekürzt betrachte: $\arcsin(\sin(x))$ ist aber nicht immer gleich x .

8 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Tutor und Mathematiklehrer Benjamin Stelter und meinem Seminarfachdozenten Prof. Dr. Harald Löwe bedanken, die mich bei der Umsetzung des Projektes unterstützt und zum Schreiben des in der Mathematikinformation veröffentlichten Artikels motiviert haben. Insbesondere verdanke ich Herrn Löwe die Gewissheit, dass die physikalische Bestätigung formal einwandfrei ist.

Wertvolle Kommentare, Hinweise und Gespräche von bzw. mit Prof. Dr. Bernd Burghardt haben mir dazu verholfen, die mathematische Notation an verschiedenen Stellen dieser Arbeit verständlicher zu machen. Auch dafür möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Der auf stark mechanisch beanspruchbare Polymere spezialisierten Firma IGUS, die so freundlich war, mir eine Rolle ihres TRIBOFILAMENTES zur Verfügung zu stellen, ist zu verdanken, dass ich die noch ausstehenden Versuche durchführen kann.

Literatur

- [1] Wikipedia. *Torsionspendel* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. 2020. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Torsionspendel&oldid=197287922#Physikalische_Beschreibung.
- [2] Pieces of Time. *Rare English Tic Tac Escapement Watch*. URL: <https://www.antique-watch.com/product-35-w10085.html?Page=product&URLName=35-w10085>.
- [3] Wikipedia. *Abfall (Uhr)* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. 2020. URL: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Abfall_\(Uhr\)&oldid=200545181](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Abfall_(Uhr)&oldid=200545181).
- [4] Jürgen Riegel. *FreeCAD: An open-source parametric 3D CAD modeler*. URL: <https://www.freecadweb.org>.
- [5] Kai Schmidt-Brauns. „Überlegungen zur Berechnung der Profilkurve für die Hemmung eines mechanischen Uhrwerks“. In: *Mathematikinformation* 73 (2020). URL: <http://www.mathematikinformation.info/>.
- [6] Kai Schmidt-Brauns. *Konstruktion und mathematische Optimierung eines vollständig 3D-gedruckten Uhrwerkes*. Jugend forscht Regionalwettbewerb Braunschweig – Technik. 2021.
- [7] Wikipedia. *Formelsammlung Trigonometrie* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. 2020. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Formelsammlung_Trigonometrie&oldid=196652004#Additionstheoreme.
- [8] IGI. *GeoGebra*. 2020. URL: <https://www.geogebra.org/>.
- [9] wxMaxima developers. *wxMaxima*. URL: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>.
- [10] Wikipedia. *Parallelkurve* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. 2020. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Parallelkurve&oldid=197583077>.
- [11] Audacity Team. *Audacity®: Free Audio Editor and Recorder [Computer application]*. Audacity® software is copyright © 1999-2021 Audacity Team. The name Audacity® is a registered trademark. 2020. URL: <https://audacityteam.org/>.

Anhang A Vollständige Rechnung

Von besonders großer Bedeutung waren bei der Vereinfachung die Additionstheoreme der Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Zunächst eine kleine Formelsammlung, die beim Umformen hilft:

$$\sin(-x) = -\sin(x); \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad (40)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \quad (41)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x) \quad (42)$$

$$\sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos(x)^2}; \quad \cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin(x)^2} \quad (43)$$

$$\sin\left(\arctan2\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{y/x}{\sqrt{(y/x)^2 + 1}} \quad (44)$$

$$\cos\left(\arctan2\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{1}{\sqrt{(y/x)^2 + 1}} \quad (45)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy; \quad (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \quad (46)$$

Zum Platzsparen sei vorab noch folgende Definition gegeben: $q = \frac{p'_y}{p'_x}$. Ausgehend von Gleichung 17 kann so vorgegangen werden:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_T - \delta_H)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right) - \delta_T + \delta_H\right)} \\ &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_T - \delta_H)}{\cos\left(\delta_T - \underbrace{\left(\arcsin\left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right) + \delta_H\right)}_{\delta_P}\right)} && | 42, 40 \\ &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_T) \cos(\delta_H) + \sin(\delta_H) \sin(\delta_T)}{\cos(\delta_T) \cos(\delta_P) + \sin(\delta_P) \sin(\delta_T)} && | 45, 44 \\ &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(p'_x) \sqrt{q^2 + 1}^{-1} \cdot \cos(\delta_H) + \sin(\delta_H) \cdot q}{\operatorname{sgn}(p'_x) \sqrt{q^2 + 1}^{-1} \cdot \cos(\delta_P) + \sin(\delta_P) \cdot q} \\ &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right) + \delta_H\right) + q \sin(\delta_P)} && | 42, \text{vereinfachen} \\ &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right)\right) \cos(\delta_H) - \frac{d}{r_P} \sin(\beta) \sin(\delta_H) + q \sin(\delta_P)} \\ & && | 43, \text{vereinfachen} \\ &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right)^2} \cdot \cos(\delta_H) - \frac{d}{r_P} \sin(\beta) \sin(\delta_H) + q \sin(\delta_P)} && | \text{analog für } \sin(\delta_P) \\ &= \frac{r_H}{r_P} \cdot \frac{\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{r_P} \sin(\beta)\right)^2} \cdot (\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)) + \frac{d}{r_P} \sin(\beta) \cdot (q \cos(\delta_H) - \sin(\delta_H))} \\ & && | r_P \text{ aus Wurzel ziehen} \\ &= \frac{r_H}{\mathcal{P}} \cdot \frac{\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)}{\underbrace{\sqrt{\frac{r_P^2 - d^2 \sin(\beta)^2}{r_P^2}}}_{w} \cdot (\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)) + \frac{d}{\mathcal{P}} \sin(\beta) \cdot (q \cos(\delta_H) - \sin(\delta_H))} \end{aligned}$$

$$w = \sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2 - d^2 \sin(\beta)^2} \quad | \quad 43$$

$$= \sqrt{\cancel{r_H^2} - \cancel{r_H^2 \cos(\beta)^2} + \cancel{d^2} + \cancel{r_H^2 \cos(\beta)^2} - 2 \cdot d \cdot r_H \cos(\beta) - \cancel{d^2} + d^2 \cos(\beta)^2} \quad | \quad 46$$

$$= \sqrt{(r_H - d \cos(\beta))^2} = r_H - d \cos(\beta)$$

$$\eta = \frac{r_H \cdot (\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H))}{(r_H - d \cos(\beta)) \cdot (\cos(\delta_H) + q \sin(\delta_H)) + d \sin(\beta) \cdot (q \cos(\delta_H) - \sin(\delta_H))}$$

| q ausklammern

$$= \frac{r_H \cdot (q \sin(\delta_H) + \cos(\delta_H))}{q \cdot ((r_H - d \cos(\beta)) \cdot \sin(\delta_H) + d \sin(\beta) \cos(\delta_H)) + (r_H - d \cos(\beta)) \cdot \cos(\delta_H) - d \sin(\beta) \sin(\delta_H)} \quad \left| \begin{array}{l} (r_H - d \cos(\beta)) \\ \text{ausmultiplizieren} \end{array} \right.$$

$$= \frac{r_H \cdot (q \sin(\delta_H) + \cos(\delta_H))}{q \cdot (r_H \sin(\delta_H) - d \cos(\beta) \sin(\delta_H) + d \sin(\beta) \cos(\delta_H)) + r_H \cos(\delta_H) - d \cos(\beta) \cos(\delta_H) - d \sin(\beta) \sin(\delta_H)} \quad | \quad 41, 42; \delta_H = \alpha + \beta$$

$$= \frac{r_H \cdot (q \sin(\delta_H) + \cos(\delta_H))}{q \cdot (r_H \sin(\delta_H) - d \sin(\alpha)) + r_H \cos(\delta_H) - d \cos(\alpha)} = \frac{Z}{N} \quad \left| \begin{array}{l} q \text{ in Zähler einsetzen} \\ \text{und direkt mit } p'_x \text{ er-} \\ \text{weitern} \end{array} \right.$$

$$Z = \frac{r_H}{p'_x} \cdot ((d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - \cancel{r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\delta_H)}) \cdot \sin(\delta_H)$$

$$+ (-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + \cancel{r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\delta_H)}) \cdot \cos(\delta_H)) \quad | \quad d \cdot \alpha' \text{ ausklammern}$$

$$= \frac{r_H}{p'_x} \cdot (d \cdot \alpha' \cdot (\cos(\alpha) \sin(\delta_H) - \sin(\alpha) \cos(\delta_H))) \quad | \quad 41; \delta_H = \alpha + \beta$$

$$= \frac{r_H}{p'_x} \cdot d \cdot \alpha' \cdot \sin(\beta)$$

$$\eta = \frac{r_H \cdot d \cdot \alpha' \cdot \sin(\beta)}{p'_x \cdot (q \cdot (r_H \sin(\delta_H) - d \sin(\alpha)) + r_H \cos(\delta_H) - d \cos(\alpha))} = \frac{Z}{N}$$

| q in Nenner einsetzen und direkt mit p'_x multiplizieren

$$N = (d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\delta_H)) \cdot (r_H \sin(\delta_H) - d \sin(\alpha)) + (-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\delta_H)) \cdot (r_H \cos(\delta_H) - d \cos(\alpha))$$

| α' ausklammern

$$\begin{aligned} &= \alpha' \cdot (\cancel{d \cos(\alpha) \cdot r_H \sin(\delta_H)} - \cancel{d \cos(\alpha) \cdot d \sin(\alpha)} \\ &\quad - \cancel{r_H \cos(\delta_H) \cdot r_H \sin(\delta_H)} + \cancel{r_H \cos(\delta_H) \cdot d \sin(\alpha)} \\ &\quad - \cancel{d \sin(\alpha) \cdot r_H \cos(\delta_H)} + \cancel{d \sin(\alpha) \cdot d \cos(\alpha)} \\ &\quad + \cancel{r_H \sin(\delta_H) \cdot r_H \cos(\delta_H)} - \cancel{r_H \sin(\delta_H) \cdot d \cos(\alpha)} \\ &\quad - \cancel{r_H \cos(\delta_H) \cdot r_H \sin(\delta_H)} + r_H \cos(\delta_H) \cdot d \sin(\alpha) \\ &\quad + \cancel{r_H \sin(\delta_H) \cdot r_H \cos(\delta_H)} - r_H \sin(\delta_H) \cdot d \cos(\alpha) \end{aligned}$$

| 41

| N wieder in η einsetzen

$$\eta = \frac{\cancel{r_H \cdot d \cdot \alpha' \cdot \sin(\beta)}}{\cancel{-r_H \cdot d \cdot \sin(\beta)}} = -\alpha'$$

Anhang B Erweiterte Datenauswertung

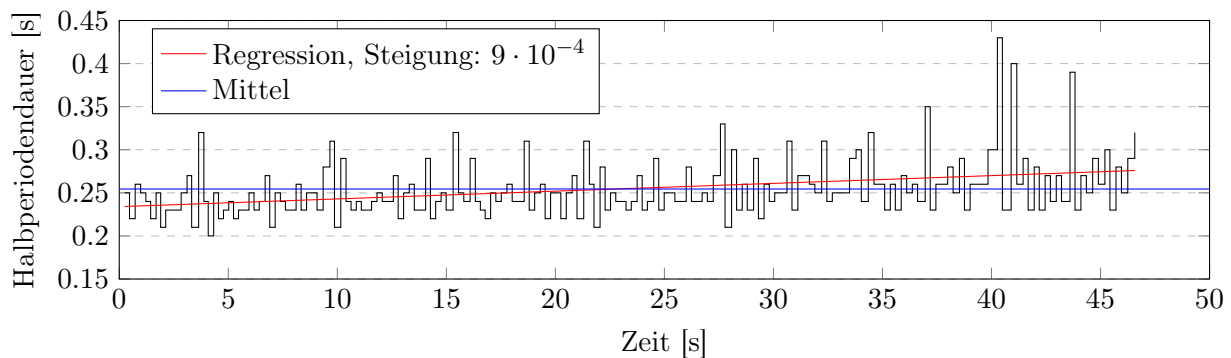


Abbildung 13: Halbperiodendauer am empirischen Profilrad

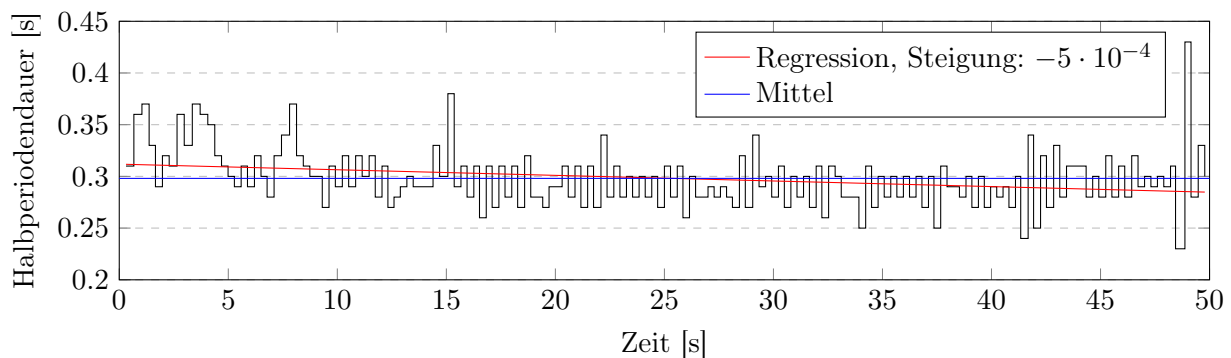


Abbildung 14: Halbperiodendauer am berechneten Profilrad

Abbildung 13 und Abbildung 14 zeigen den zeitlichen Verlauf der Halbperiodendauern zusammen mit ihrer linearen Regression als Gesamttendenz des Verlaufes: Während am empirischen Profilrad eine positive Steigung der durchschnittlichen Halbperiodendauer auszumachen ist, weist die des berechneten Profilrades eine negative Steigung auf. Diese Gesamttendenzen der Halbperiodendauern können mit den zuvor vorgestellten Hypothesen begründet werden, wonach das empirische Profilrad bei hoher Federkraft eine höhere Frequenz erzwingt, wohingegen das berechnete Profilrad bei großer Federkraft anfangs für eine höhere Reibung sorgt und die Unruh ausbremst.

Aus den Diagrammen geht auch hervor, dass das berechnete Profilrad mit 49,78s überhaupt länger am Stück läuft als das empirisch bestimmte, das die Unruhschwingung 46,57s lang aufrechterhält; allerdings lässt sich das vor allem auf die höhere Schwingungsfrequenz zurückführen; mit 184 Halbperioden im Vergleich zu 168 überträgt das empirisch bestimmte Profilrad über die Gesamtlaufzeit mehr Energie auf die Unruh¹⁶. Ein weiteres Indiz für die höhere Leistungsfähigkeit des berechneten Profilrades ist aber der Betrag des Steigungswertes der Ausgleichsgeraden: Da $|-5 \cdot 10^{-4}| < |9 \cdot 10^{-4}|$, ist die durchschnittliche Periodendauer weniger stark von der Zeit abhängig, sodass ich meine Hoffnung an die Kurvenberechnung hinsichtlich höherer Ganggenauigkeit erfüllt sehe. Das berechnete scheint also im Gegensatz zum empirischen Profilrad, das sehr unregelmäßig, aber dafür über eine größere Kräftespanne läuft, eine höhere Genauigkeit zum Preis einer etwas geringeren Krafttoleranz oder „Zuverlässigkeit“ zu haben.

Eine weitere interessante Beobachtung am Verhalten der Halbperiodendauer des berechneten Profilrades lässt das Zeitintervall zwischen 20s und 25s zu, denn darin sind – wie vorhergesehen – die sich stets abwechselnden Halbperiodendauern deutlich zu erkennen. Daraus lässt sich

¹⁶Denn während jeder Halbperiode entspannt sich die Antriebsfeder über einen festen Winkel weiter und je mehr die Feder sich entspannt hat, desto mehr Energie hat sie übertragen.

schließen, dass das Profilrad nicht ruhelagenneutral angebracht ist. Zählt man die Halbperioden bis zu den entsprechenden Stellen, kommt man zu dem Ergebnis, dass die aus der ersten Blockierphase und zweiten Antriebsphase bestehende Halbperiode¹⁷ länger dauert als die andere. Geht man davon aus, dass die längere Dauer – wie zuvor angenommen – durch einen weiteren Beschleunigungsweg der Unruh verursacht wird, ist anzunehmen, dass das Profilrad in Abbildung 5 von der nicht-ausgelenkten Ausrichtung aus dem Uhrzeigersinn nach verdreht ist.

Abschließend möchte ich noch darauf hinweisen, dass die sich systematisch abwechselnden Halbperiodendauern beim empirischen Profilrad durch die Messreihe kaum nachgewiesen werden können, denn die Halbperiodendauern ändern sich fortwährend, ohne das zuvor beschriebene Muster der abwechselnden Dauern aufzuweisen; im Diagramm sind nur unregelmäßige Schwankungen zu sehen. Das ist ein weiterer Aspekt, der zeigt, dass das berechnete Profilrad einen regelmäßigeren Gang des Uhrwerkes erwirkt.

¹⁷Das Klicken entspringt der Hemmung also zu Beginn der zweiten Blockierphase (Abbildung 5d).