

# Berechnung der Profilkurve einer Hemmung für die Konstruktion eines mechanischen Uhrwerkes

*Kai Schmidt – B√auns*

Jugend forscht, Fachbereich Mathematik

Mai 2021

# Zusammenfassung der bisherigen Forschungsergebnisse

- ▶ Uhrwerk von Grund auf selbst konstruiert
  - bestehend aus Aufzugmechanismus, Energiereservoir, Unruh und Hemmung
  - alles vollständig 3D-druckbar
- ▶ Implementation eines eigenen Hemmungsmechanismus
- ▶ Entwicklung und Herleitung eines mathematischen Modells zur Geometriebestimmung
  - Bestätigung des Ergebnisses durch Energiebetrachtung
  - Untersuchung des Gültigkeitsbereiches
- ▶ praktische Anwendung des Modells durch Parallelkurven und CAD-Software
  - Definition einer sinnvollen Drehmomentverhältnisfunktion
- ▶ akustische Aufnahme von Messreihen der Halbperiodendauern
  - Vergleich eines empirischen mit einem berechneten Profilrad
  - Vergleich von Standard-PLA mit Spezialfilament
  - statistische Auswertung bestätigt bessere Gangeigenschaften mit berechnetem Profilrad und Spezialfilament
  - Erklärung weiterer durch Messungen entdeckter Besonderheiten

# Aktueller Forschungsstand

## einige andere Hemmungsmechanismen

- ▶ Hemmungsprinzip scheint einzigartig zu sein
  - ähnelt am ehesten Tic Tac- und Kommahemmung
  - keine Ergebnisse bei Internetrecherche zu mathematischen Modellen
- ▶ Ankerhemmung in mechanischen Armbanduhren am weitesten verbreitet
  - freie Hemmung, keine ruhende Phasen, Reduktion reibungsbedingter Schwingungsstörung
  - relativ günstig
    - rigorose theoretische Behandlung in Publikationen



Abbildung: Tic Tac-Hemmung

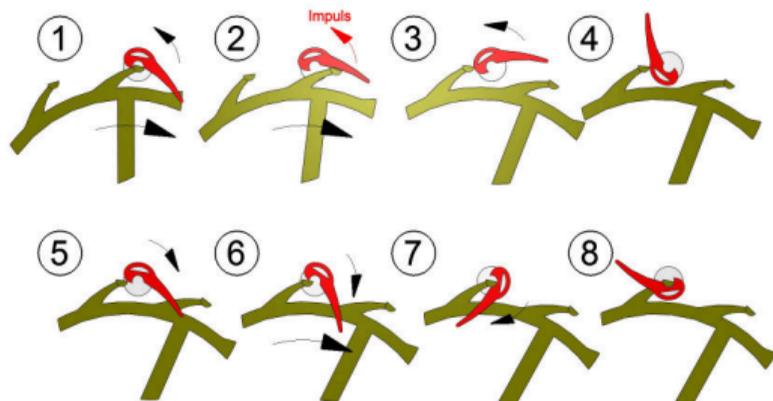


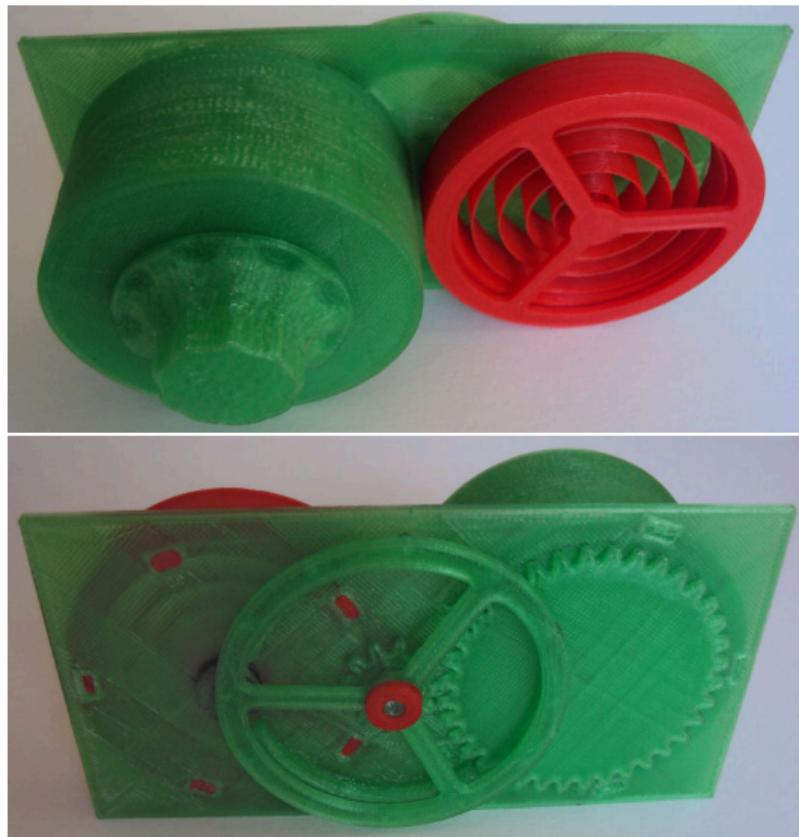
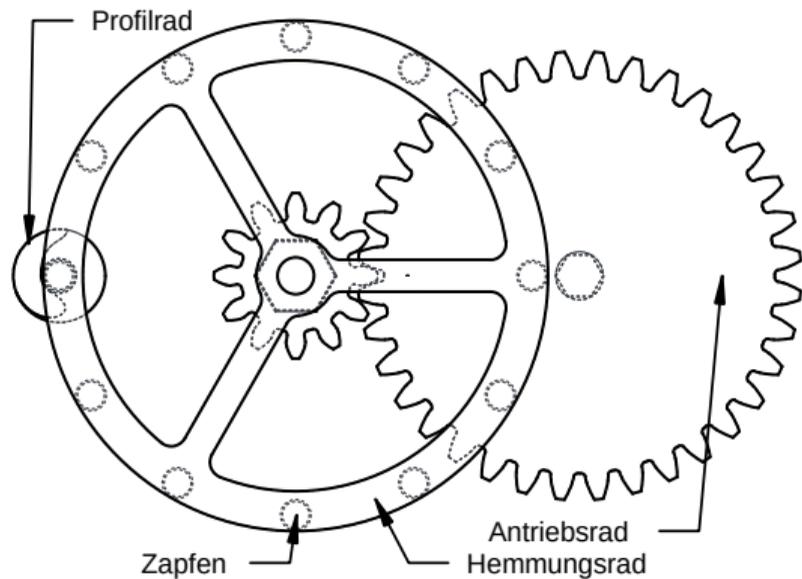
Abbildung: Kommahemmung

# Überblick

## Beschreibung der Mechanik

### ► Gliederung in drei Teile

- Energiereservoir
- Unruh
- **Hemmung**



# Energiereservoir

## Beschreibung der Mechanik

- ▶ Energie in Antriebsfedern der Federhäuser gespeichert
- ▶ Federhäuser lassen sich durch „Stapeln“ hintereinanderschalten
- ▶ Aufziehen erfolgt über Sperrklinke
- ▶ anderes Ende ist mit Antriebsrad verbunden → Aufziehen während des Betriebs möglich

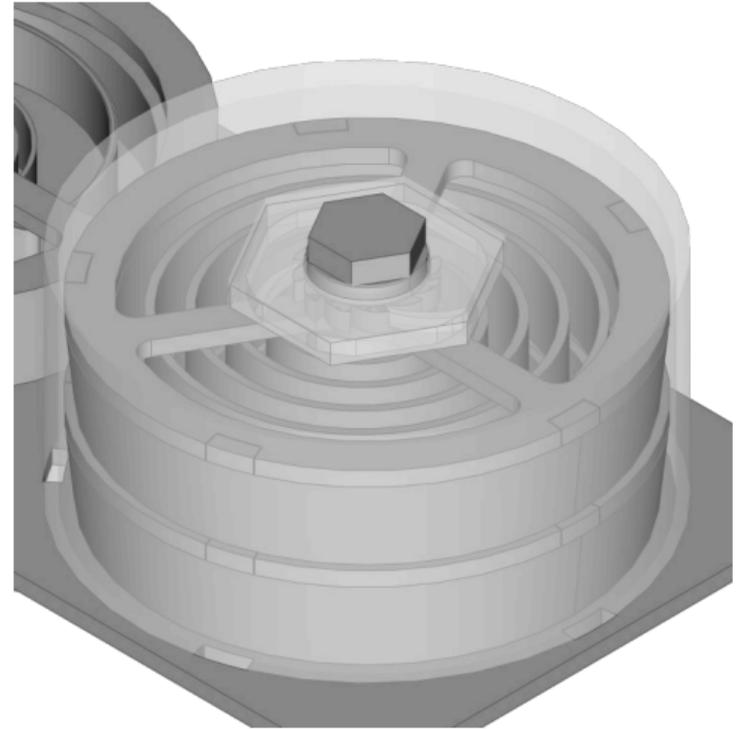
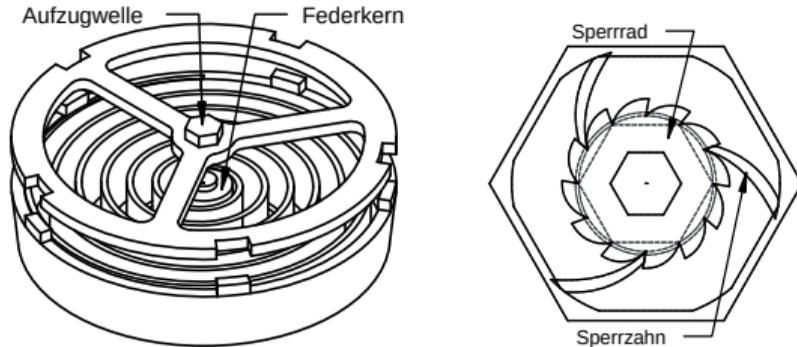


Abbildung: Federhausstapel im Gehäuse

# Unruh

## Beschreibung der Mechanik

- ▶ Unruh: Drehschwinger aus Unruhring und Spiralfeder
- ▶ Verteilung der Masse des Unruhringes möglichst weit vom Drehzentrum entfernt
  - möglichst großes Trägheitsmoment bei geringer Masse
- ▶ Spiralfeder mit „dogleg“ versehen: möglichst konzentrische Ausdehnung der Spirale durch Knick
  - notwendig für harmonische Schwingung und regelmäßigen Gang

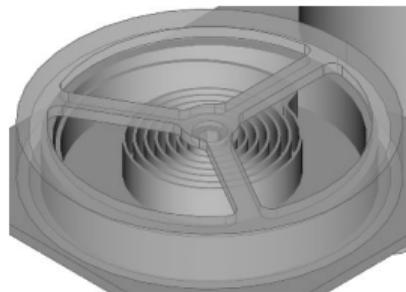


Abbildung: FreeCAD-Ansicht der Unruh

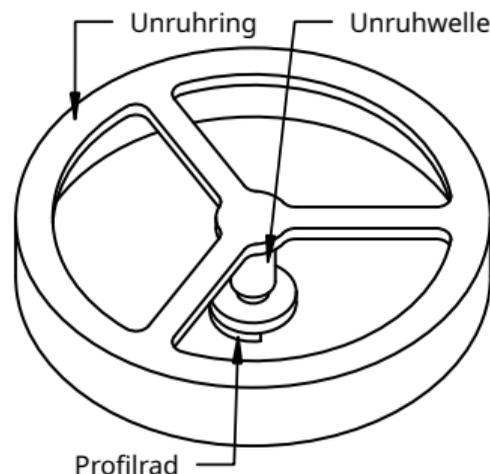


Abbildung: Verbindung Unruh-Profilrad

# Tic Tac-Hemmung

## Beschreibung der Mechanik

- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrade*

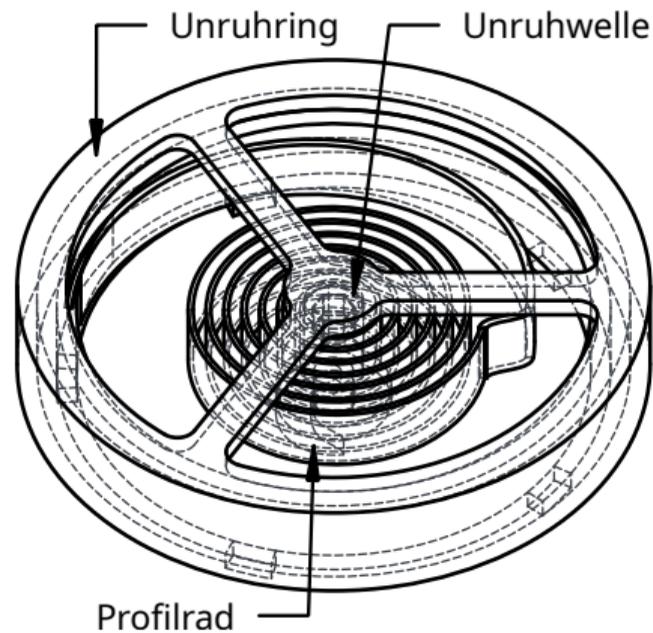


Abbildung: Verbindung zwischen Unruh und Profilrad

# Tic Tac-Hemmung

## Beschreibung der Mechanik

- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen

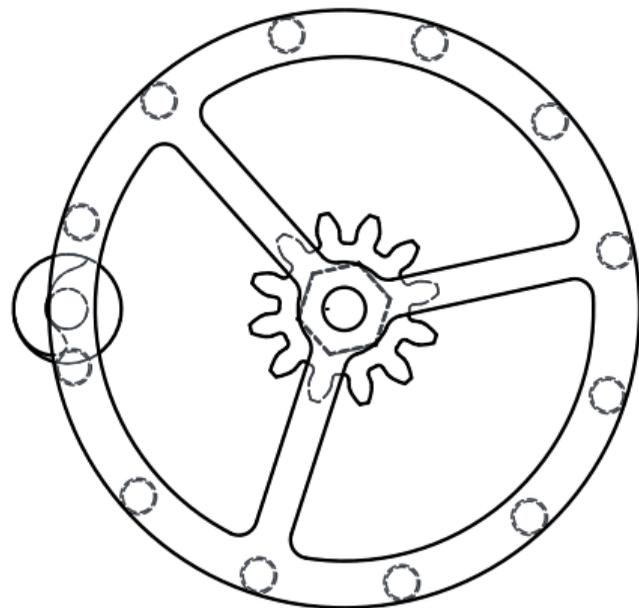
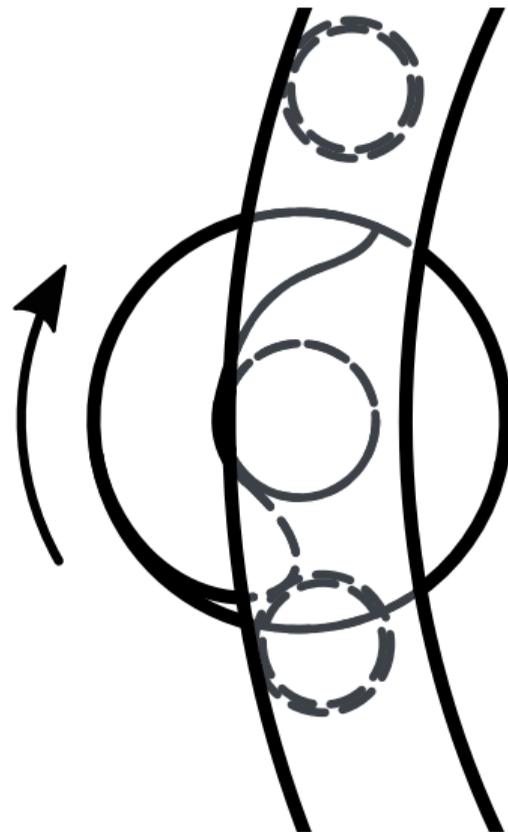


Abbildung: Hemmung: links  
Profilrad, rechts Hemmungsrads

# Tic Tac-Hemmung →

## Beschreibung der Mechanik

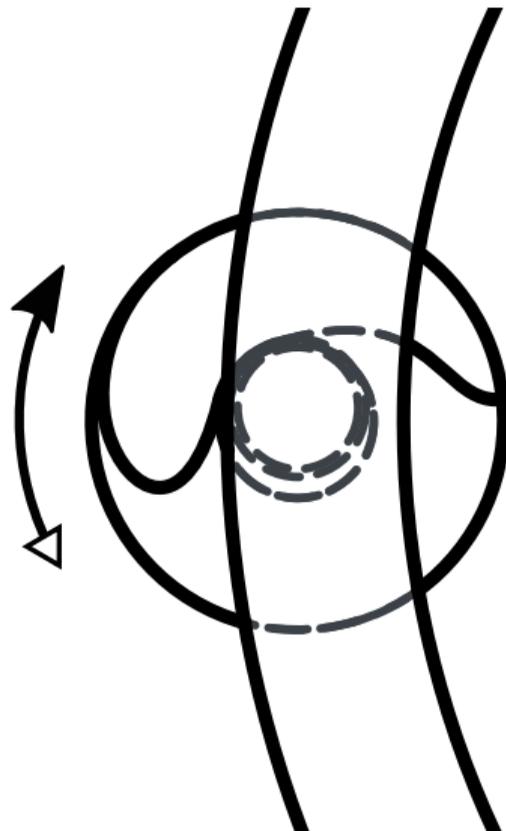
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
  - **Erste Antriebsphase:** Beschleunigung der Unruh in eine Richtung



# Tic Tac-Hemmung →

## Beschreibung der Mechanik

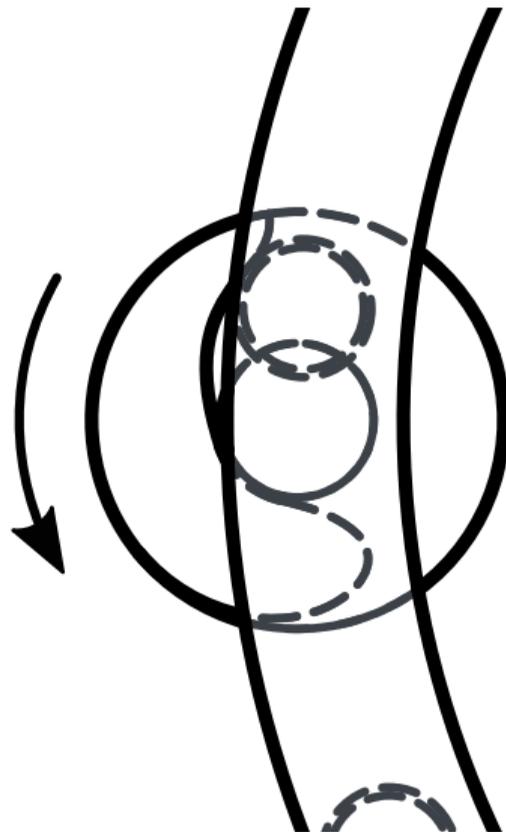
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
  - Erste Antriebsphase: Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
  - **Erste Blockierphase**: Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt



# Tic Tac-Hemmung →

## Beschreibung der Mechanik

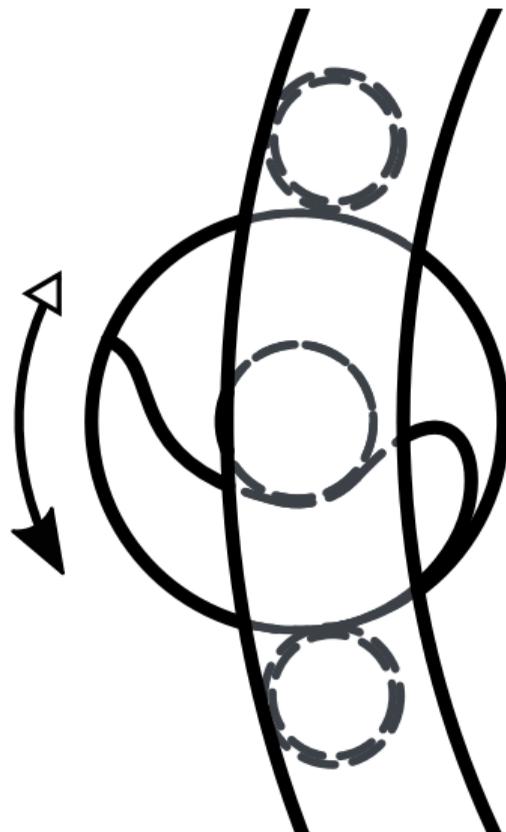
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
  - Erste Antriebsphase: Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
  - Erste Blockierphase: Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt
  - **Zweite Antriebsphase:** Beschleunigung in die andere Richtung nach Freigabe des Zapfens beim Nulldurchgang der Unruh



# Tic Tac-Hemmung $\mapsto$

## Beschreibung der Mechanik

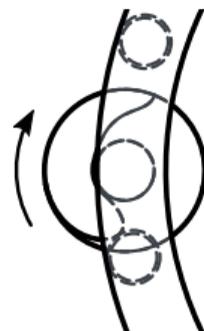
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad  $\rightarrow$  periodischer Zyklus von 4 Phasen
  - Erste Antriebsphase: Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
  - Erste Blockierphase: Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt
  - Zweite Antriebsphase: Beschleunigung in die andere Richtung nach Freigabe des Zapfens beim Nulldurchgang der Unruh
  - **Zweite Blockierphase:** erneute Blockade bis zum nächsten Nulldurchgang der Unruh, dann Wiederholung des Vorgangs



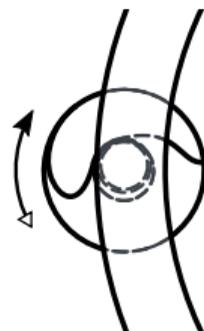
# Tic Tac-Hemmung

## Beschreibung der Mechanik

- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenen *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
  - **Erste Antriebsphase:** Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
  - **Erste Blockierphase:** Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt
  - **Zweite Antriebsphase:** Beschleunigung in die andere Richtung nach Freigabe des Zapfens beim Nulldurchgang der Unruh
  - **Zweite Blockierphase:** erneute Blockade bis zum nächsten Nulldurchgang der Unruh, dann Wiederholung des Vorgangs



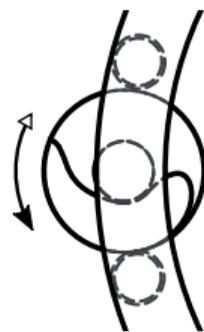
(a) Erste Antriebsphase



(b) Erste Blockierphase



(c) Zweite Antriebsphase



(d) Zweite Blockierphase

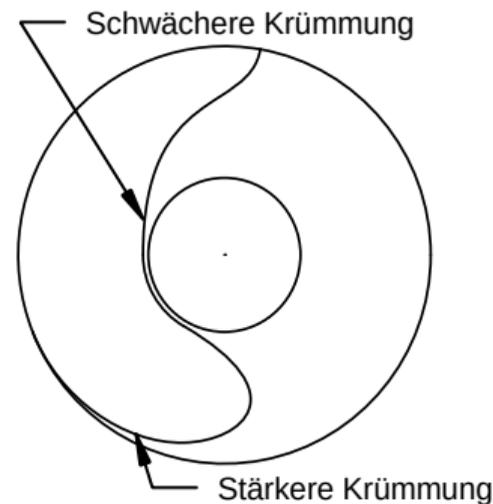
# Problemstellung

- ▶ Hemmung bindet effektive Drehrate des Hemmungsrades an Schwingung der Unruh
  - ▶ Störung der Schwingungsbewegung bei Energiezufuhr durch Hemmung
  - ▶ Eigenschaften der Hemmung wie Art und Ausmaß der Störung durch Profilkurve bestimmt
  - ▶ erwünscht: **regelmäßiger Gang**, **geringer Abfallfehler** und **hohe Laufzeit** → Voraussetzungen:
    - möglichst kurze Phasen der Energieübertragung nahe Nulldurchgang der Unruh
    - Toleranz der Hemmung gegenüber breiter Spanne an Drehmomenten
- ⇒ Berechnung der Profilkurve nach wohldefinierten Parametern

# Trial and Error

## Ansätze

- ▶ empirische Ermittlung der ersten Profilradkurven zum Test der Uhrwerkkonstruktion
  - Senkung der Ansprüche: kein geringer Abfallfehler, hauptsache läuft
- ▶ Bedingungen für sinnvolle Kurvenkandidaten
  - eher geringe Abweichung von Kreisbahn der Zapfen
  - stärkere Krümmung am äußeren Ende → Kompensation der Reibung
  - schwächere Krümmung in der Mitte aus selben Grund
- ▶ außerdem empirisch bestimmt: Profilradradius
  - **zu groß** → hoher Energieverlust, Lautstärke, Verschleiß, geringe Laufzeit
  - **zu klein** → große (Reibungs-)Kräfte ( $M = F \cdot r$ ), 3D-Druckverfahren zu ungenau



# Kräfte, Geometrie, Analysis

## Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

$d$ : Abstand zwischen Profilrad- und Hemmungsradmittelpunkt

$r_H$ : Radius des Hemmungsrades

$r_P$ : Abstand zwischen Profilrad- und Zapfenmittelpunkt

$\alpha$ : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profilrad

$\beta$ : Drehwinkel Hemmunggrad

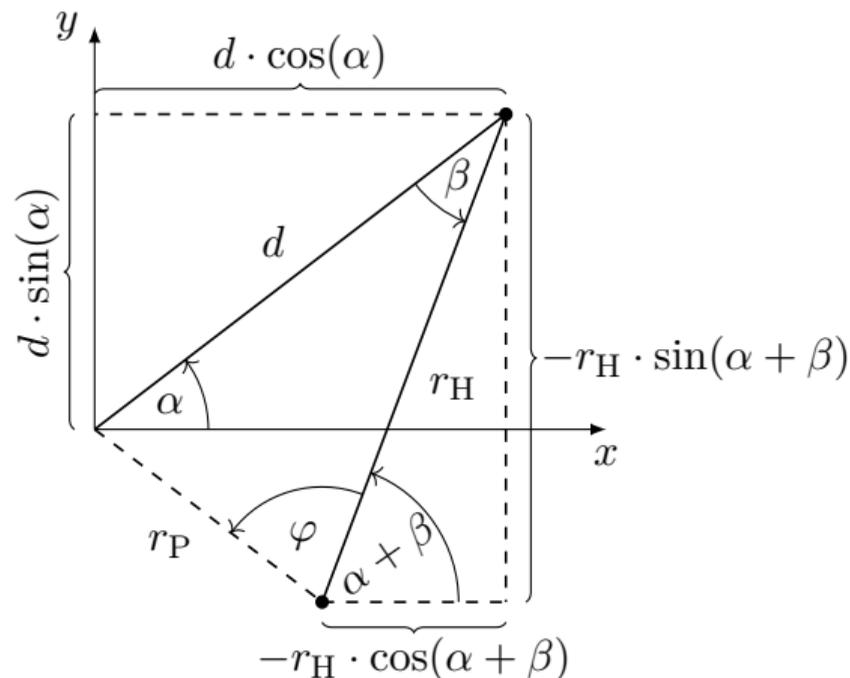


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

# Kräfte, Geometrie, Analysis

## Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

$d$ : Abstand zwischen Profilrad- und Hemmungsradmittelpunkt

$r_H$ : Radius des Hemmungsrades

$r_P$ : Abstand zwischen Profilrad- und Zapfenmittelpunkt

$\alpha$ : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profilrad

$\beta$ : Drehwinkel Hemmunggrad

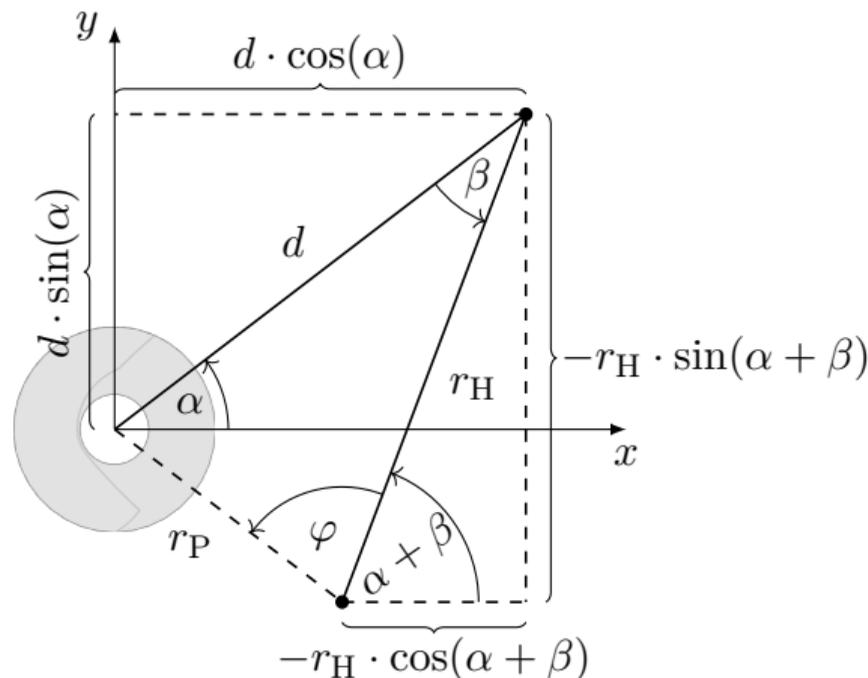


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

# Kräfte, Geometrie, Analysis

## Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

$d$ : Abstand zwischen Profilrad- und Hemmungsradmittelpunkt

$r_H$ : Radius des Hemmungsrades

$r_P$ : Abstand zwischen Profilrad- und Zapfenmittelpunkt

$\alpha$ : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profilrad

$\beta$ : Drehwinkel Hemmungrad

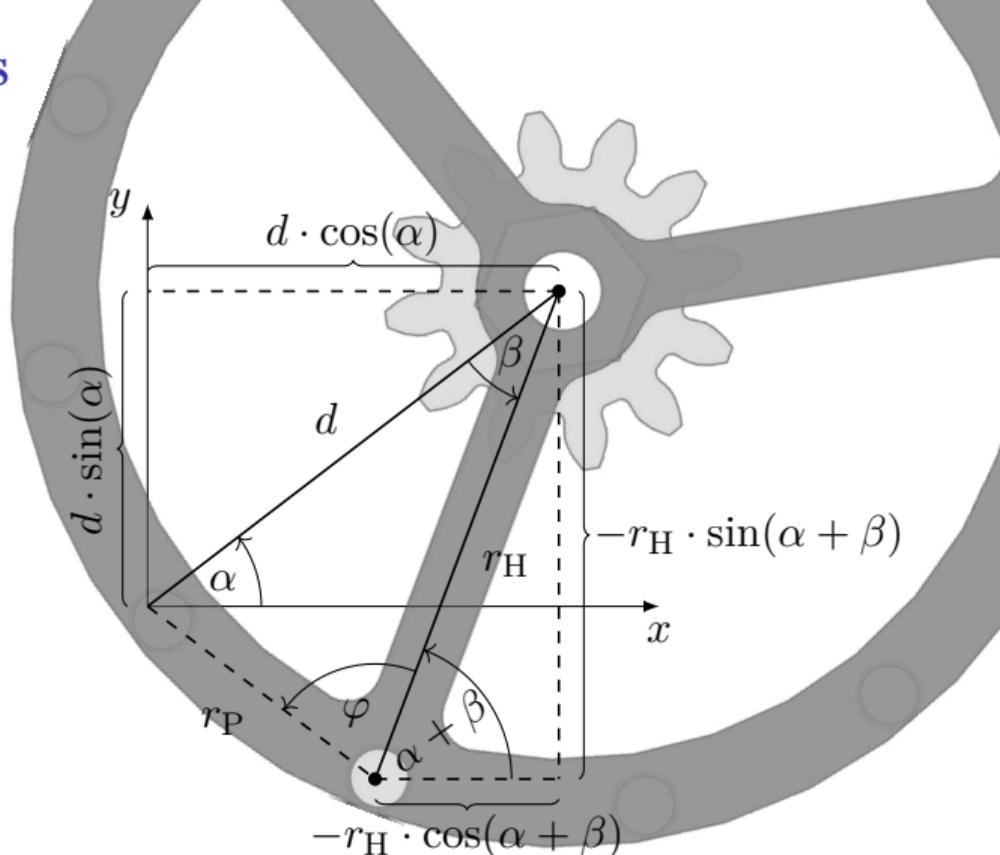


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

# Kräfte, Geometrie, Analysis

## Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

$d$ : Abstand zwischen Profiltrad- und Hemmungsradmittelpunkt

$r_H$ : Radius des Hemmungsrades

$r_P$ : Abstand zwischen Profiltrad- und Zapfenmittelpunkt

$\alpha$ : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profiltrad

$\beta$ : Drehwinkel Hemmungrad

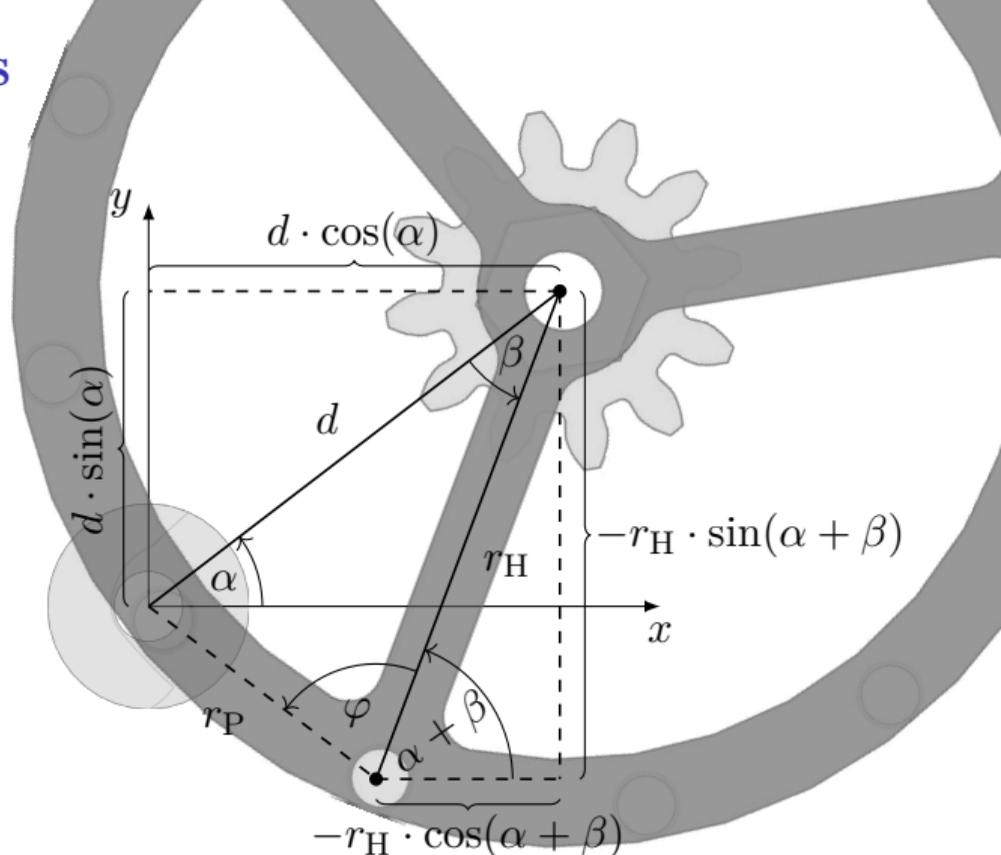
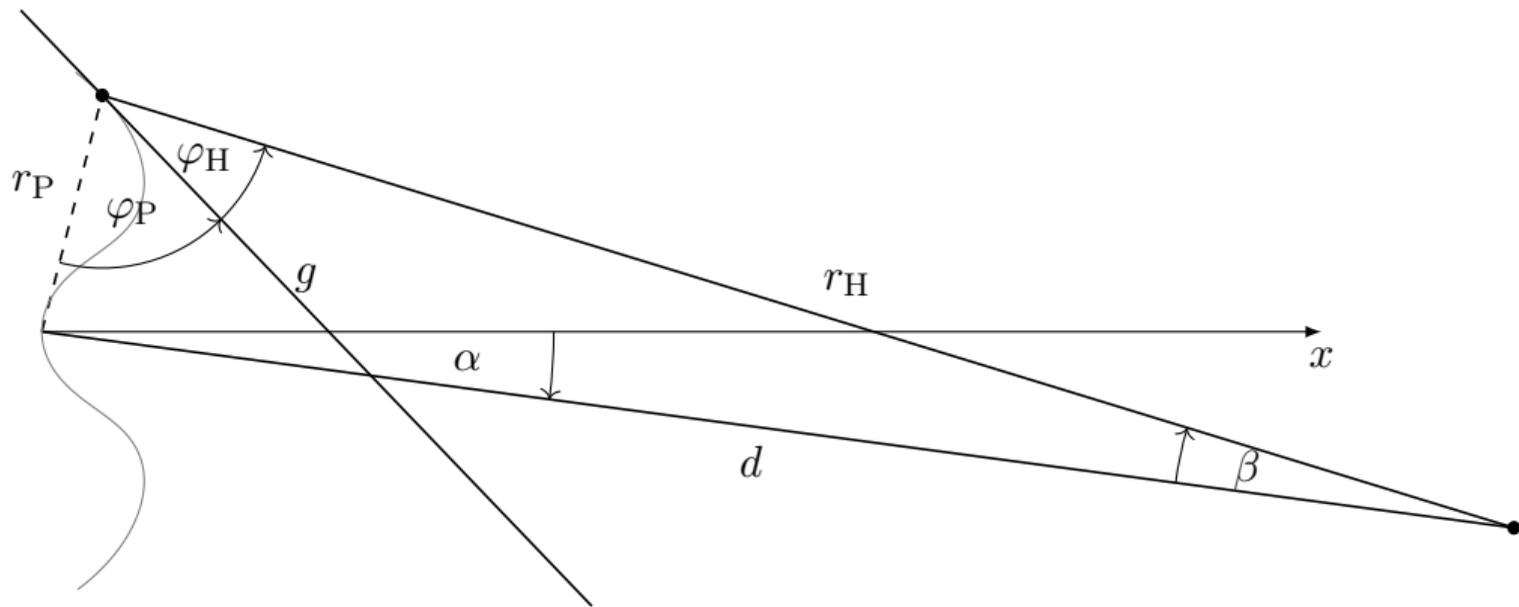


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

# Kräfte, Geometrie, Analysis

## Ansätze



**Abbildung:** Kräfteaufteilung an der Kurventangente: Die vom Hemmungsrads auf das Profiltrad gegen den Uhrzeigersinn wirkende Tangentialkraft wird an der Profiltangente  $g$  aufgeteilt, sodass dieses in die gleiche Drehrichtung gezwungen, d. h.  $\alpha$  kleiner wird.

# Kräfte, Geometrie, Analysis

## Ansätze

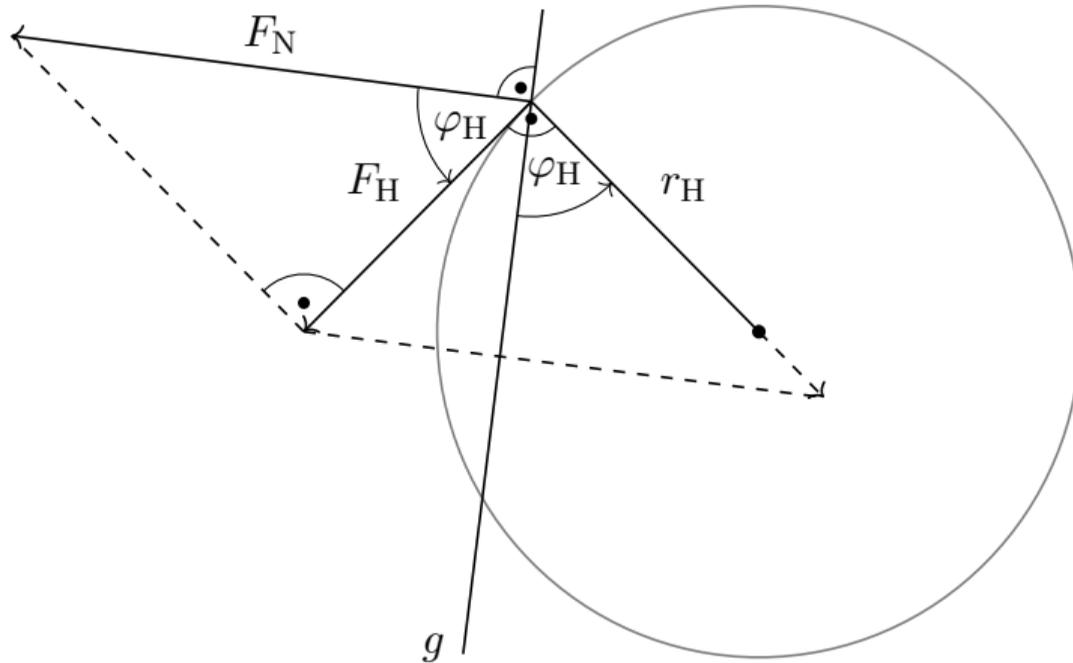


Abbildung: Kräfteaufteilung an der Geraden  $g$ , die Profilkurventangente ist, am Hemmungsrade

# Kräfte, Geometrie, Analysis

## Ansätze

- ▶ Geometrie führt zu komplizierter Gleichung für Drehmomentverhältnis  $\frac{M_H}{M_P}$ :

$$\eta(\beta) = \frac{r_H}{\sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2}} \cdot \frac{\cos\left(\arctan2\left(\frac{d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\alpha + \beta)}{-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\alpha + \beta)}\right) - \alpha - \beta\right)}{\cos\left(\arctan2\left(\frac{d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\alpha + \beta)}{-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\alpha + \beta)}\right) - \arcsin\left(\frac{d \cdot \sin(\beta)}{\sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2}}\right) - \alpha - \beta\right)}$$

- ▶ Vereinfachung durch langwierige Umformungen zu:

$$\eta(\beta) = -\alpha'(\beta)$$

- ▶ parametrische Gleichung der Profilkurve lautet folglich:

$$\vec{p}_\eta(\beta) = \begin{pmatrix} d \cos(-\int_0^\beta \eta(b) db) - r_H \cos(\beta - \int_0^\beta \eta(b) db) \\ d \sin(-\int_0^\beta \eta(b) db) - r_H \sin(\beta - \int_0^\beta \eta(b) db) \end{pmatrix} : \beta \in \left[-\frac{\Delta\beta}{2}; \frac{\Delta\beta}{2}\right]$$

## Bestätigung durch Energiebetrachtung

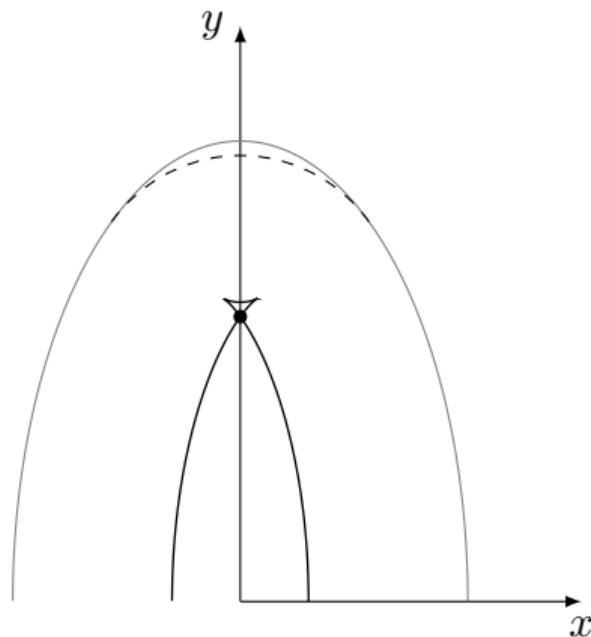
- ▶  $\eta(\beta) = -\alpha'(\beta)$  lässt sich physikalisch erklären  
→ Herleitung durch Energieerhaltungssatz möglich
- ▶ Dreharbeit allgemein:  $E_D = \int \frac{M(s)}{r} ds = \int M \left( \frac{s}{r} \right) d\frac{s}{r} = \int M(\varphi) d\varphi$
- ▶ Dreharbeit Hemmungsrads:  $\Delta E_H = \int_{\sigma}^{\beta} M_H(\varphi) d\varphi$
- ▶ Dreharbeit Profiltrad:  $\Delta E_P = \int_{-\alpha(\sigma)}^{-\alpha(\beta)} M_P(\varphi) d\varphi$
- ▶ Energieerhaltungssatz ( $\Delta E_H = \Delta E_P$ ):

$$\int_{\sigma}^{\beta} M_H(\varphi) d\varphi = \int_{-\alpha(\sigma)}^{-\alpha(\beta)} M_P(\varphi) d\varphi \quad \left| \frac{d}{d\beta} \right.$$
$$M_H(\beta) = -M_P(-\alpha(\beta)) \cdot \alpha'(\beta) \quad \left| : M_P \right.$$
$$\frac{M_H}{M_P} = \eta(\beta) = -\alpha'(\beta)$$

# Anwendung auf ein reales Profilrad

- ▶ bisherige Annahme: Zapfen ist mathematischer Punkt, tatsächlich hat er jedoch Radius  $r_Z$  von ca. 2 mm
  - Anwendung von Parallelkurven oder „Offset3D“ in FreeCAD
- ▶ unveränderte Kräfteaufteilung an Berührungspunkt Kurve/Zapfen
- ▶ Ausnahme: extreme Krümmung
- ▶ Bedingung für zu große Krümmung:

$$\max_{t \in \left[-\frac{\Delta\beta}{2}; \frac{\Delta\beta}{2}\right]} \left( \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right) > r_Z$$



**Abbildung:** Außen liegende Ellipsenkurve und eine dazugehörige Parallelkurve, bei der die Bahnkurve des Zapfens abweicht, weil er Kreisförmig an der als Punkt dargestellten Kurvenspitze abrollt.

## Anwendung der Profilkurvengleichung

- ▶ sinnvolle Definition der Drehmomentverhältnisfunktion  $\eta$
- ▶ besonders einfache Variante: kurz konstantes positives Drehmomentverhältnis für Beschleunigung in eine, negatives Verhältnis für andere Richtung; Blockierphasen weisen Sprungstelle in  $\alpha$  auf (Profilrad dreht sich ohne Hemmungsrad weiter  $\rightarrow \eta = \pm\infty$ ); sonst 0 (freie Drehung des Hemmungsrades bis zur Blockierphase)

$$\eta(\beta)_{m,w} = \begin{cases} m & \text{für } -\frac{\Delta\beta}{2} \leq \beta < w - \frac{\Delta\beta}{2} \\ -\infty & \text{für } \beta = 0 \\ -m & \text{für } 0 < \beta < w \\ \infty & \text{für } \beta = \frac{\Delta\beta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} : 0 < w \leq \frac{\Delta\beta}{2}$$

$m$ : Betrag des Drehmomentverhältnisses der Antriebsphasen

$w$ : Winkel des Hemmungsrades, über den Antriebsphasen andauern sollen

# Anwendung der Profilkurvengleichung

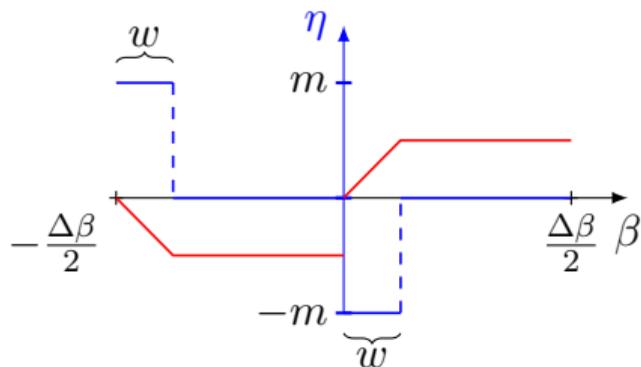


Abbildung: Verlauf von  $\eta$  (blau) und  $\alpha$  (rot)

- ▶ Sprungstellen in  $\alpha$ : Beschleunigung sofort nach Nulldurchgang der Unruh
- ▶ FreeCAD-Makro „3D Parametric Curve“ erzeugt aus Kurvengleichung 3D-Modell

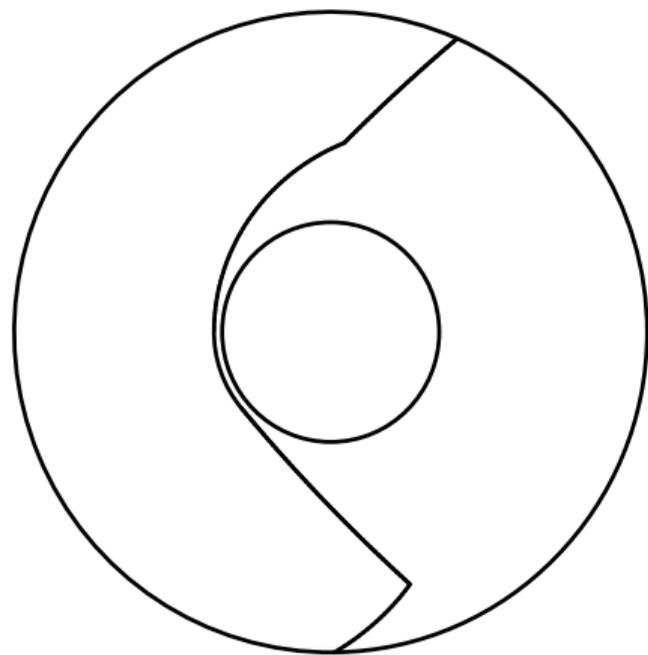


Abbildung: Beispiel für ein berechnetes Profilrad

# Messreihe zum Vergleich

- ▶ Ziel: Vergleich des mathematischen Ansatzes mit dem empirischen Ansatz
  - zusätzlich Wiederholung des Versuchs mit IGUS-TRIBOFILAMENT
- ▶ Methode: Aufnahme der Klickgeräusche per Smartphonemikrofon
- ▶ dazu beste Exemplare des empirischen bzw. mathematischen Ansatzes in Uhrwerk eingesetzt
- ▶ Analyse der Aufnahme durch Audacity und anschließend statistische Auswertung

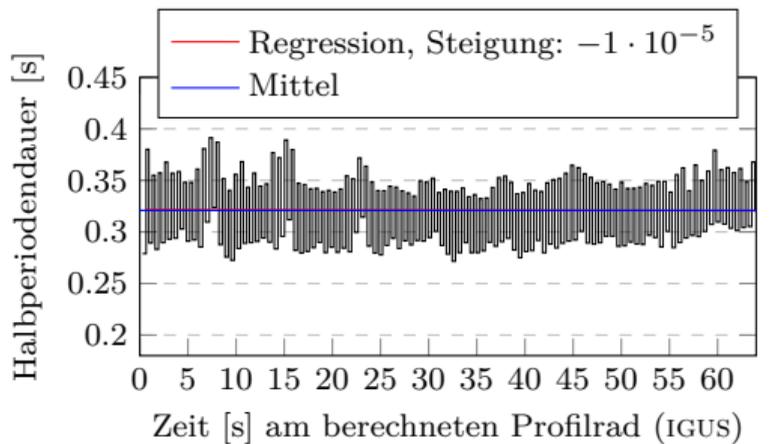
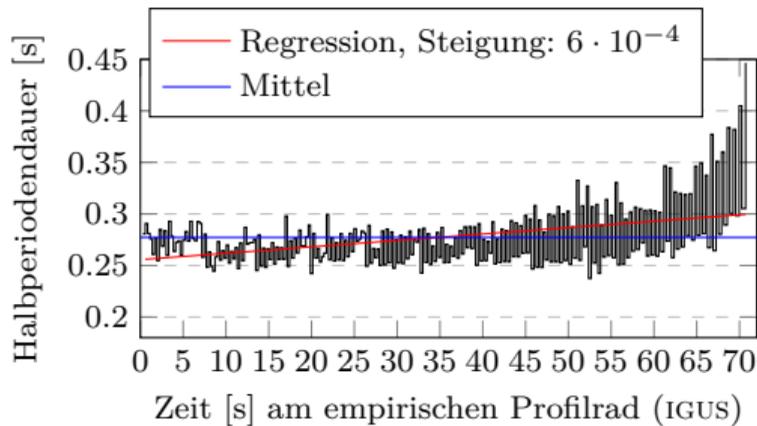
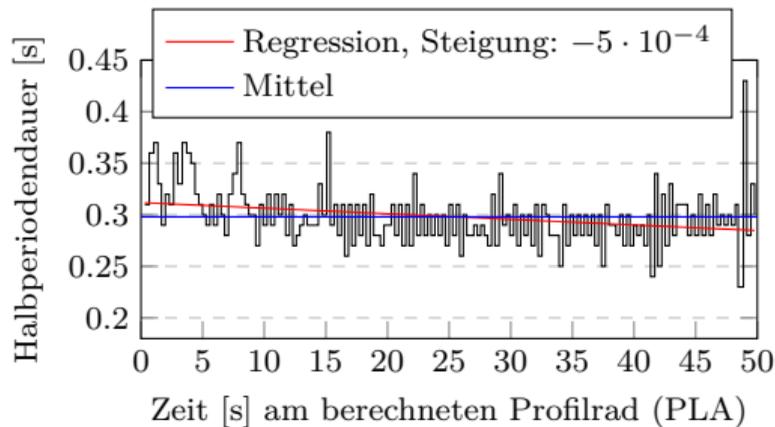
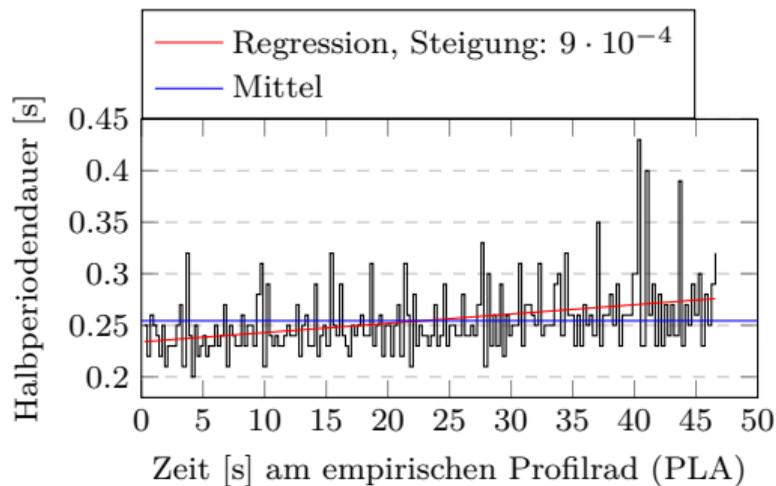
# Ergebnisse

- ▶ Laufzeiten (Halbperioden) / empirisch, berechnet
  - PLA: 49,78 s (184), 46,57 s (168)
  - IGUS: 70,71 s (256), 63,87 s (200)
- ▶ berechnetes Profiltrad sorgt für regelmäßigeren Gang
- ▶ empirisches Profiltrad ist gegenüber breiterer Kräftespanne tolerant
- ▶ Schwingungsfrequenz mit berechnetem Profiltrad niedriger
  - Reibung beim berechneten Profiltrad, zu hohe Krafteinwirkung durch Hemmung beim empirischen
- ▶ TRIBOFILAMENT von IGUS bewirkt erhöhte Laufzeit und regelmäßigeren Gang
- ▶ Laufzeit mit empirischem Profiltrad höher, gegen Ende sehr unregelmäßiger Gang
  - verringerte Reibung

Tabelle: statistische Auswertung der Messdaten

E = empirischer Ansatz; M = mathematischer Ansatz

		1. Halbperiode		2. Halbperiode		Periode	
		E	M	E	M	E	M
PLA	Mittel	0,24 s	0,28 s	0,26 s	0,31 s	0,51 s	0,60 s
	Mittelabweichung	0,02 s	0,02 s	0,03 s	0,02 s	0,03 s	0,02 s
	Relative Abweichung	6,87 %	5,43 %	10,60 %	5,20 %	6,17 %	4,09 %
igus	Mittel	0,29 s	0,35 s	0,26 s	0,29 s	0,55 s	0,64 s
	Mittelabweichung	0,02 s	0,01 s	0,01 s	0,01 s	0,02 s	0,01 s
	Relative Abweichung	7,29 %	2,90 %	3,80 %	2,52 %	4,20 %	2,30 %



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!  
Gibt es noch weitere Fragen?