

Berechnung der Profilkurve einer Hemmung für die Konstruktion eines mechanischen Uhrwerkes

Kai Schmidt – B√auns

Jugend forscht, Fachbereich Mathematik

Mai 2021

Zusammenfassung der bisherigen Forschungsergebnisse

- ▶ Uhrwerk von Grund auf selbst konstruiert
 - bestehend aus Aufzugmechanismus, Energiereservoir, Unruh und Hemmung
 - alles vollständig 3D-druckbar
- ▶ Implementation eines eigenen Hemmungsmechanismus
- ▶ Entwicklung und Herleitung eines mathematischen Modells zur Geometriebestimmung
 - Bestätigung des Ergebnisses durch Energiebetrachtung
 - Untersuchung des Gültigkeitsbereiches
- ▶ praktische Anwendung des Modells durch Parallelkurven und CAD-Software
 - Definition einer sinnvollen Drehmomentverhältnisfunktion
- ▶ akustische Aufnahme von Messreihen der Halbperiodendauern
 - Vergleich eines empirischen mit einem berechneten Profilrad
 - Vergleich von Standard-PLA mit Spezialfilament
 - statistische Auswertung bestätigt bessere Gangeigenschaften mit berechnetem Profilrad und Spezialfilament
 - Erklärung weiterer durch Messungen entdeckter Besonderheiten

Aktueller Forschungsstand

einige andere Hemmungsmechanismen

- ▶ Hemmungsprinzip scheint einzigartig zu sein
 - ähnelt am ehesten Tic Tac- und Kommahemmung
 - keine Ergebnisse bei Internetrecherche zu mathematischen Modellen
- ▶ Ankerhemmung in mechanischen Armbanduhren am weitesten verbreitet
 - freie Hemmung, keine ruhende Phasen, Reduktion reibungsbedingter Schwingungsstörung
 - relativ günstig
 - rigorose theoretische Behandlung in Publikationen



Abbildung: Tic Tac-Hemmung

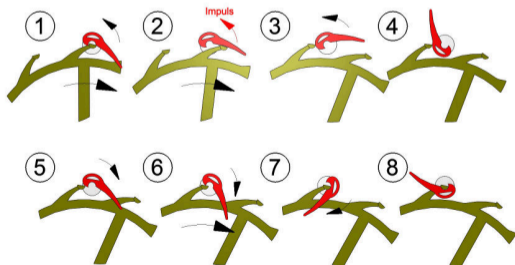


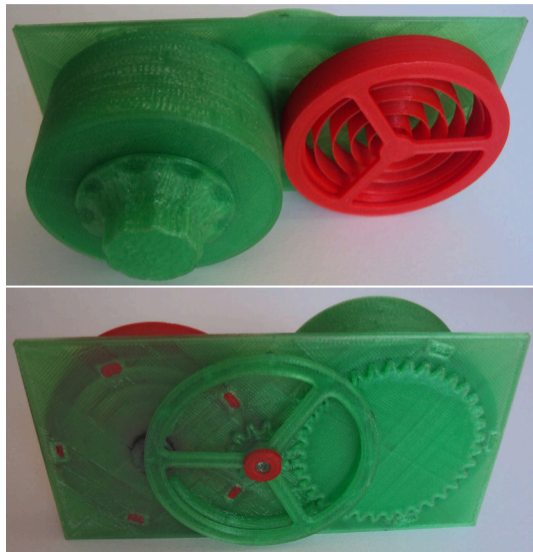
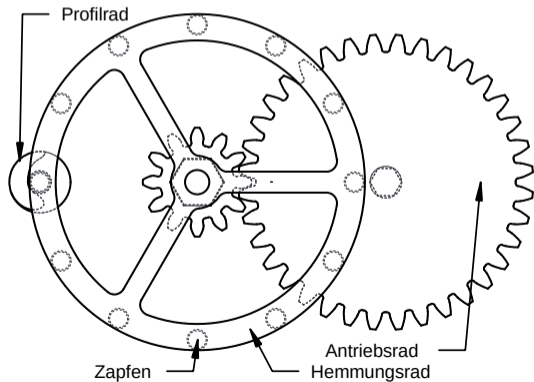
Abbildung: Kommahemmung

Überblick

Beschreibung der Mechanik

► Gliederung in drei Teile

- Energiereservoir
- Unruh
- **Hemmung**



Energiereservoir

Beschreibung der Mechanik

- ▶ Energie in Antriebsfedern der Federhäuser gespeichert
- ▶ Federhäuser lassen sich durch „Stapeln“ hintereinanderschalten
- ▶ Aufziehen erfolgt über Sperrklinke
- ▶ anderes Ende ist mit Antriebsrad verbunden → Aufziehen während des Betriebs möglich

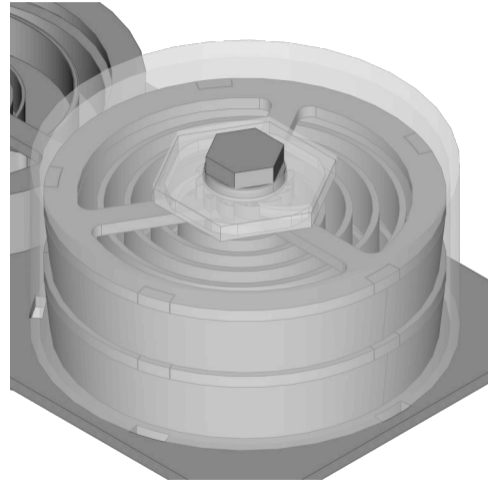
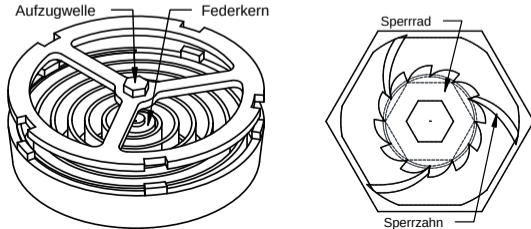


Abbildung: Federhausstapel im Gehäuse

Unruh

Beschreibung der Mechanik

- ▶ Unruh: Drehschwinger aus Unruhring und Spiralfeder
- ▶ Verteilung der Masse des Unruhringes möglichst weit vom Drehzentrum entfernt
 - möglichst großes Trägheitsmoment bei geringer Masse
- ▶ Spiralfeder mit „dogleg“ versehen: möglichst konzentrische Ausdehnung der Spirale durch Knick
 - notwendig für harmonische Schwingung und regelmäßigen Gang

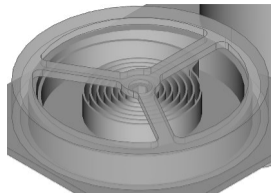


Abbildung: FreeCAD-Ansicht der Unruh

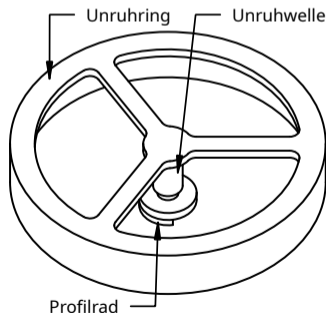


Abbildung: Verbindung Unruh-Profilrad

Tic Tac-Hemmung

Beschreibung der Mechanik

- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrade*

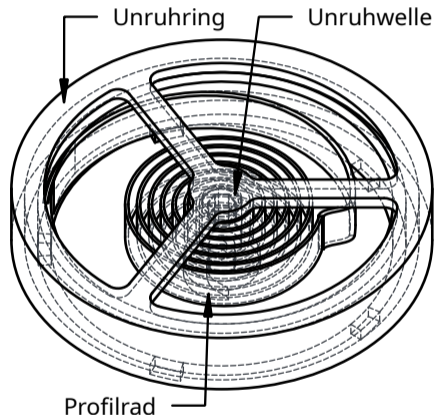


Abbildung: Verbindung zwischen Unruh und Profilrad

Tic Tac-Hemmung

Beschreibung der Mechanik

- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen

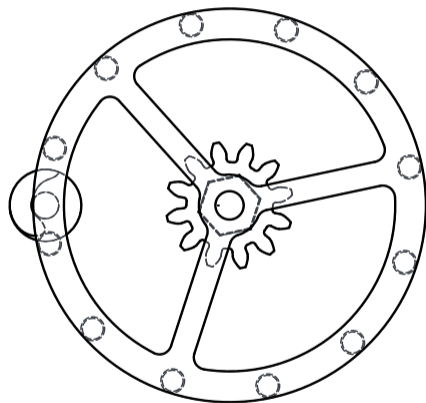
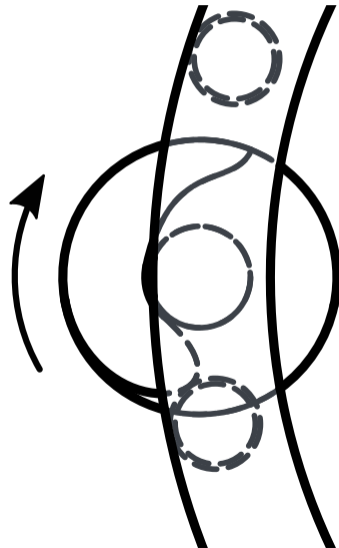


Abbildung: Hemmung: links
Profilrad, rechts Hemmungsrads

Tic Tac-Hemmung →

Beschreibung der Mechanik

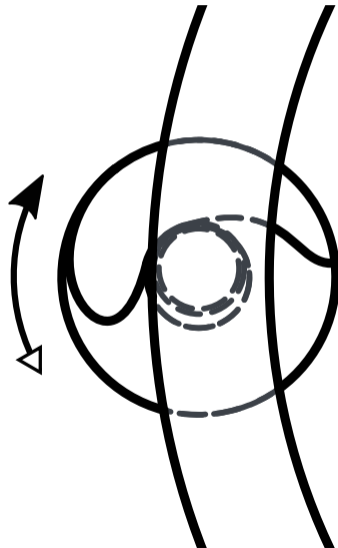
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
 - **Erste Antriebsphase:** Beschleunigung der Unruh in eine Richtung



Tic Tac-Hemmung →

Beschreibung der Mechanik

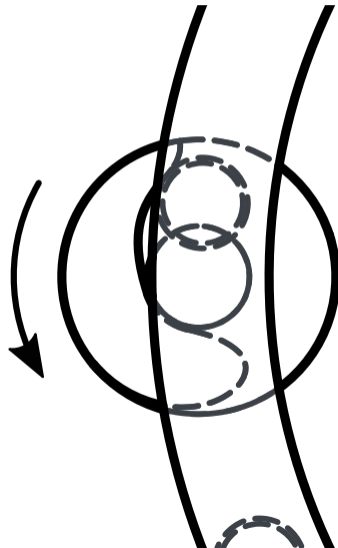
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
 - Erste Antriebsphase: Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
 - **Erste Blockierphase**: Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt



Tic Tac-Hemmung →

Beschreibung der Mechanik

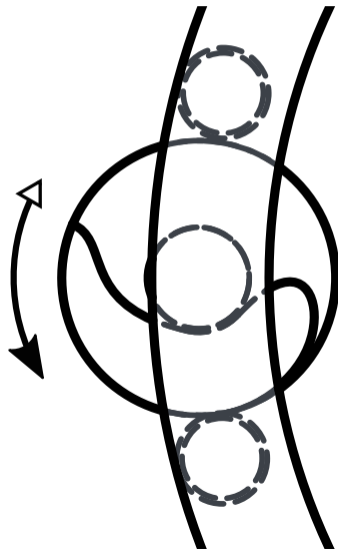
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
 - Erste Antriebsphase: Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
 - Erste Blockierphase: Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt
 - **Zweite Antriebsphase:** Beschleunigung in die andere Richtung nach Freigabe des Zapfens beim Nulldurchgang der Unruh



Tic Tac-Hemmung \mapsto

Beschreibung der Mechanik

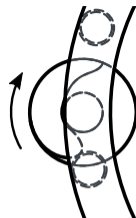
- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad \rightarrow periodischer Zyklus von 4 Phasen
 - Erste Antriebsphase: Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
 - Erste Blockierphase: Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt
 - Zweite Antriebsphase: Beschleunigung in die andere Richtung nach Freigabe des Zapfens beim Nulldurchgang der Unruh
 - **Zweite Blockierphase:** erneute Blockade bis zum nächsten Nulldurchgang der Unruh, dann Wiederholung des Vorgangs



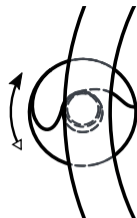
Tic Tac-Hemmung

Beschreibung der Mechanik

- ▶ besteht aus zwei Teilen: mit Unruhwelle verbundenes *Profilrad* und *Hemmungsrads*
- ▶ Hemmungsrads mit Zapfen durchläuft Profilrad → periodischer Zyklus von 4 Phasen
 - **Erste Antriebsphase:** Beschleunigung der Unruh in eine Richtung
 - **Erste Blockierphase:** Blockade des Hemmungsrades durch das Profilrad, während die Schwingung ungehindert fortfährt
 - **Zweite Antriebsphase:** Beschleunigung in die andere Richtung nach Freigabe des Zapfens beim Nulldurchgang der Unruh
 - **Zweite Blockierphase:** erneute Blockade bis zum nächsten Nulldurchgang der Unruh, dann Wiederholung des Vorgangs



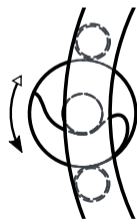
(a) Erste Antriebsphase



(b) Erste Blockierphase



(c) Zweite Antriebsphase



(d) Zweite Blockierphase

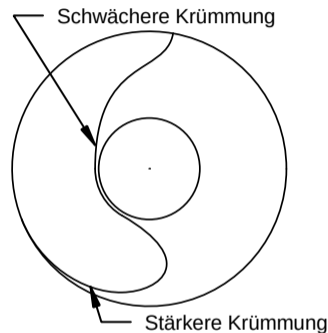
Problemstellung

- ▶ Hemmung bindet effektive Drehrate des Hemmungsrades an Schwingung der Unruh
 - ▶ Störung der Schwingungsbewegung bei Energiezufuhr durch Hemmung
 - ▶ Eigenschaften der Hemmung wie Art und Ausmaß der Störung durch Profilkurve bestimmt
 - ▶ erwünscht: **regelmäßiger Gang, geringer Abfallfehler und hohe Laufzeit** → Voraussetzungen:
 - möglichst kurze Phasen der Energieübertragung nahe Nulldurchgang der Unruh
 - Toleranz der Hemmung gegenüber breiter Spanne an Drehmomenten
- ⇒ Berechnung der Profilkurve nach wohldefinierten Parametern

Trial and Error

Ansätze

- ▶ empirische Ermittlung der ersten Profilradkurven zum Test der Uhrwerkkonstruktion
 - Senkung der Ansprüche: kein geringer Abfallfehler, hauptsache läuft
- ▶ Bedingungen für sinnvolle Kurvenkandidaten
 - eher geringe Abweichung von Kreisbahn der Zapfen
 - stärkere Krümmung am äußeren Ende → Kompensation der Reibung
 - schwächere Krümmung in der Mitte aus selben Grund
- ▶ außerdem empirisch bestimmt: Profilradradius
 - **zu groß** → hoher Energieverlust, Lautstärke, Verschleiß, geringe Laufzeit
 - **zu klein** → große (Reibungs-)Kräfte ($M = F \cdot r$), 3D-Druckverfahren zu ungenau



Kräfte, Geometrie, Analysis

Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

d : Abstand zwischen Profilrad- und Hemmungsradmittelpunkt

r_H : Radius des Hemmungsrades

r_P : Abstand zwischen Profilrad- und Zapfenmittelpunkt

α : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profilrad

β : Drehwinkel Hemmunggrad

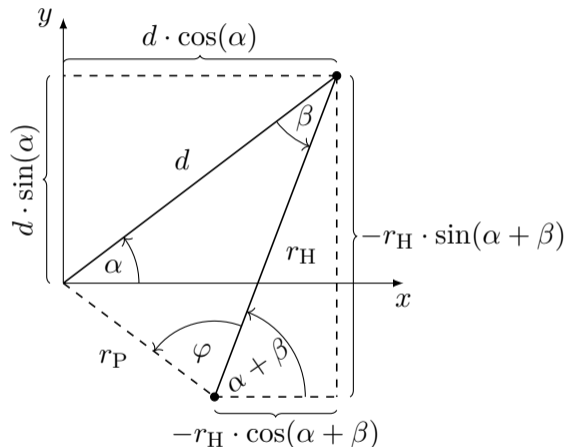


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

Kräfte, Geometrie, Analysis

Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

d : Abstand zwischen Profilrad- und Hemmungsradmittelpunkt

r_H : Radius des Hemmungsrades

r_P : Abstand zwischen Profilrad- und Zapfenmittelpunkt

α : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profilrad

β : Drehwinkel Hemmungrad

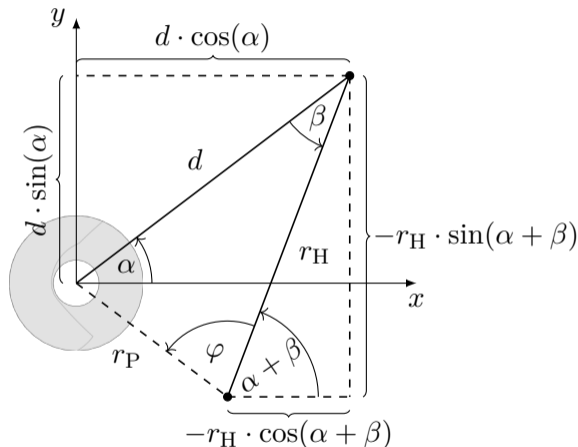


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

Kräfte, Geometrie, Analysis

Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

d : Abstand zwischen Profilrad- und Hemmungsradmittelpunkt

r_H : Radius des Hemmungsrades

r_P : Abstand zwischen Profilrad- und Zapfenmittelpunkt

α : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profilrad

β : Drehwinkel Hemmungrad

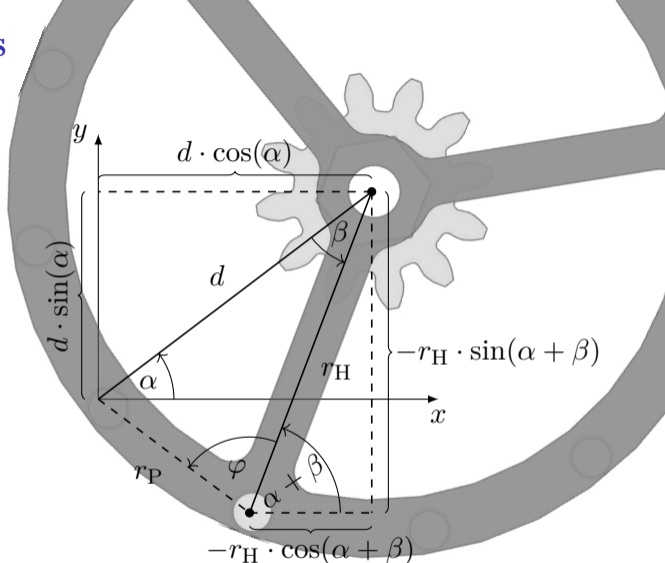


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

Kräfte, Geometrie, Analysis

Ansätze

- ▶ erster Versuch, Kurve nach wohldefinierten Parametern durch isogonale Trajektorien in Polarkoordinaten zu berechnen, schlägt fehl
- ▶ Kräfteaufteilung im kartesischen Koordinatensystem führt zum Ziel

d : Abstand zwischen Profiltrad- und Hemmungsradmittelpunkt

r_H : Radius des Hemmungsrades

r_P : Abstand zwischen Profiltrad- und Zapfenmittelpunkt

α : Drehwinkel des Uhrwerks um das Profiltrad

β : Drehwinkel Hemmungrad

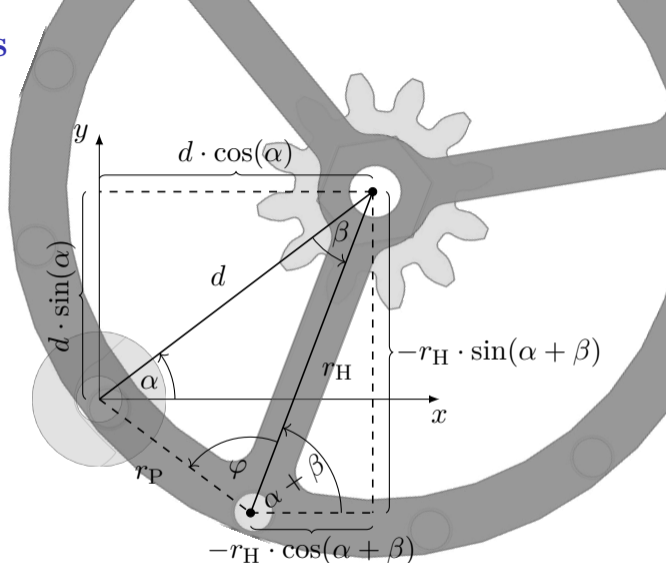


Abbildung: Koordinatensystem der Betrachtung (Vorderseite des Uhrwerkes)

Kräfte, Geometrie, Analysis

Ansätze

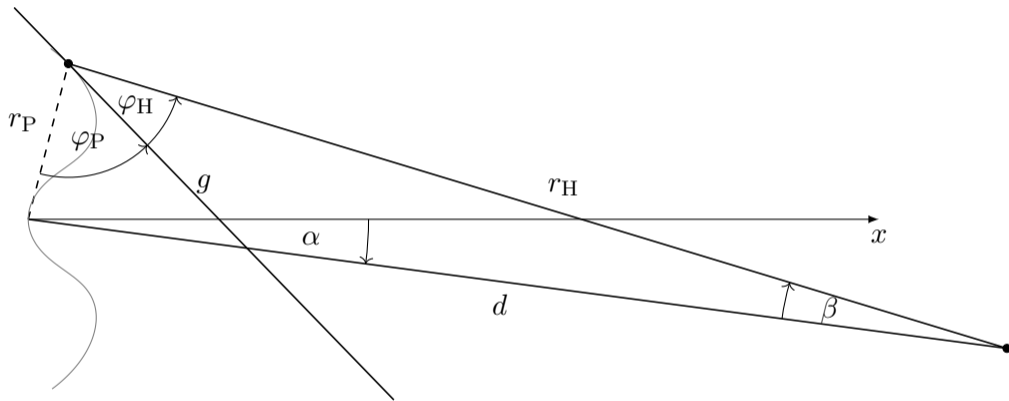


Abbildung: Kräfteaufteilung an der Kurventangente: Die vom Hemmungsrads auf das Profiltrad gegen den Uhrzeigersinn wirkende Tangentialkraft wird an der Profiltangente g aufgeteilt, sodass dieses in die gleiche Drehrichtung gezwungen, d. h. α kleiner wird.

Kräfte, Geometrie, Analysis

Ansätze

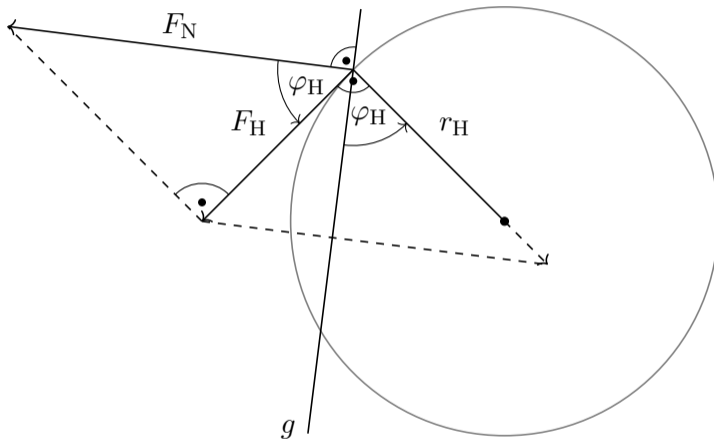


Abbildung: Kräfteaufteilung an der Geraden g , die Profilkurventangente ist, am Hemmungsrade

Kräfte, Geometrie, Analysis

Ansätze

- ▶ Geometrie führt zu komplizierter Gleichung für Drehmomentverhältnis $\frac{M_H}{M_P}$:

$$\eta(\beta) = \frac{r_H}{\sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2}} \cdot \frac{\cos\left(\arctan2\left(\frac{d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\alpha + \beta)}{-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\alpha + \beta)}\right) - \alpha - \beta\right)}{\cos\left(\arctan2\left(\frac{d \cdot \alpha' \cdot \cos(\alpha) - r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \cos(\alpha + \beta)}{-d \cdot \alpha' \cdot \sin(\alpha) + r_H \cdot (\alpha' + 1) \cdot \sin(\alpha + \beta)}\right) - \arcsin\left(\frac{d \cdot \sin(\beta)}{\sqrt{r_H^2 \sin(\beta)^2 + (d - r_H \cos(\beta))^2}}\right) - \alpha - \beta\right)}$$

- ▶ Vereinfachung durch langwierige Umformungen zu:

$$\eta(\beta) = -\alpha'(\beta)$$

- ▶ parametrische Gleichung der Profilkurve lautet folglich:

$$\vec{p}_\eta(\beta) = \begin{pmatrix} d \cos\left(-\int_0^\beta \eta(b) db\right) - r_H \cos\left(\beta - \int_0^\beta \eta(b) db\right) \\ d \sin\left(-\int_0^\beta \eta(b) db\right) - r_H \sin\left(\beta - \int_0^\beta \eta(b) db\right) \end{pmatrix} : \beta \in \left[-\frac{\Delta\beta}{2}; \frac{\Delta\beta}{2}\right]$$

Bestätigung durch Energiebetrachtung

- ▶ $\eta(\beta) = -\alpha'(\beta)$ lässt sich physikalisch erklären
→ Herleitung durch Energieerhaltungssatz möglich
- ▶ Dreharbeit allgemein: $E_D = \int \frac{M(s)}{r} ds = \int M \left(\frac{s}{r} \right) d\frac{s}{r} = \int M(\varphi) d\varphi$
- ▶ Dreharbeit Hemmungsrads: $\Delta E_H = \int_{\sigma}^{\beta} M_H(\varphi) d\varphi$
- ▶ Dreharbeit Profiltrad: $\Delta E_P = \int_{-\alpha(\sigma)}^{-\alpha(\beta)} M_P(\varphi) d\varphi$
- ▶ Energieerhaltungssatz ($\Delta E_H = \Delta E_P$):

$$\int_{\sigma}^{\beta} M_H(\varphi) d\varphi = \int_{-\alpha(\sigma)}^{-\alpha(\beta)} M_P(\varphi) d\varphi \quad \left| \frac{d}{d\beta} \right.$$
$$M_H(\beta) = -M_P(-\alpha(\beta)) \cdot \alpha'(\beta) \quad \left| : M_P \right.$$
$$\frac{M_H}{M_P} = \eta(\beta) = -\alpha'(\beta)$$

Anwendung auf ein reales Profilrad

- ▶ bisherige Annahme: Zapfen ist mathematischer Punkt, tatsächlich hat er jedoch Radius r_Z von ca. 2 mm
 - Anwendung von Parallelkurven oder „Offset3D“ in FreeCAD
- ▶ unveränderte Kräfteaufteilung an Berührungspunkt Kurve/Zapfen
- ▶ Ausnahme: extreme Krümmung
- ▶ Bedingung für zu große Krümmung:

$$\max_{t \in \left[-\frac{\Delta\beta}{2}; \frac{\Delta\beta}{2}\right]} \left(\frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right) > r_Z$$

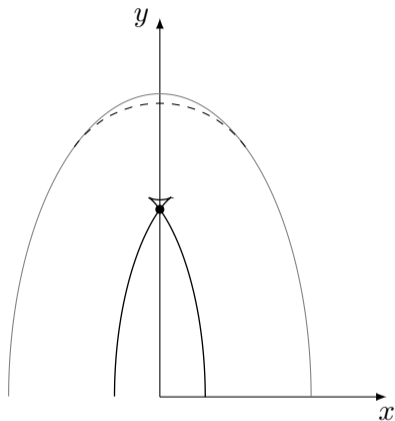


Abbildung: Außen liegende Ellipsenkurve und eine dazugehörige Parallelkurve, bei der die Bahnkurve des Zapfens abweicht, weil er Kreisförmig an der als Punkt dargestellten Kurvenspitze abrollt.

Anwendung der Profilkurvengleichung

- ▶ sinnvolle Definition der Drehmomentverhältnisfunktion η
- ▶ besonders einfache Variante: kurz konstantes positives Drehmomentverhältnis für Beschleunigung in eine, negatives Verhältnis für andere Richtung; Blockierphasen weisen Sprungstelle in α auf (Profilrad dreht sich ohne Hemmungsrad weiter $\rightarrow \eta = \pm\infty$); sonst 0 (freie Drehung des Hemmungsrades bis zur Blockierphase)

$$\eta(\beta)_{m,w} = \begin{cases} m & \text{für } -\frac{\Delta\beta}{2} \leq \beta < w - \frac{\Delta\beta}{2} \\ -\infty & \text{für } \beta = 0 \\ -m & \text{für } 0 < \beta < w \\ \infty & \text{für } \beta = \frac{\Delta\beta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} : 0 < w \leq \frac{\Delta\beta}{2}$$

m : Betrag des Drehmomentverhältnisses der Antriebsphasen

w : Winkel des Hemmungsrades, über den Antriebsphasen andauern sollen

Anwendung der Profilkurvengleichung

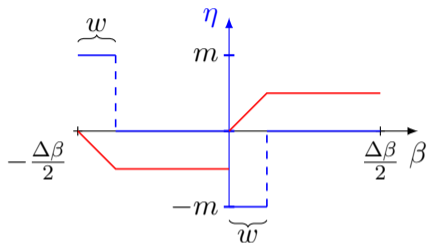


Abbildung: Verlauf von η (blau) und α (rot)

- ▶ Sprungstellen in α : Beschleunigung sofort nach Nulldurchgang der Unruh
- ▶ FreeCAD-Makro „3D Parametric Curve“ erzeugt aus Kurvengleichung 3D-Modell

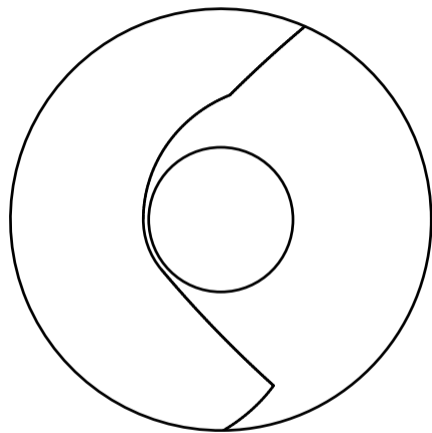


Abbildung: Beispiel für ein berechnetes Profilrad

Messreihe zum Vergleich

- ▶ Ziel: Vergleich des mathematischen Ansatzes mit dem empirischen Ansatz
 - zusätzlich Wiederholung des Versuchs mit IGUS-TRIBOFILAMENT
- ▶ Methode: Aufnahme der Klickgeräusche per Smartphonemikrofon
- ▶ dazu beste Exemplare des empirischen bzw. mathematischen Ansatzes in Uhrwerk eingesetzt
- ▶ Analyse der Aufnahme durch Audacity und anschließend statistische Auswertung

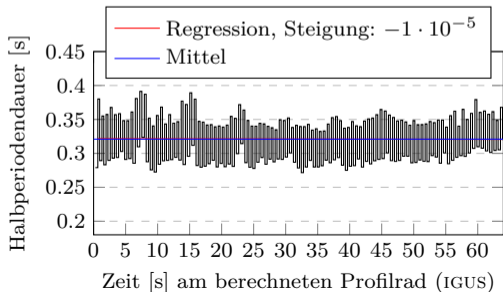
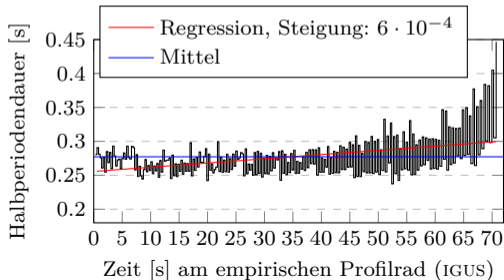
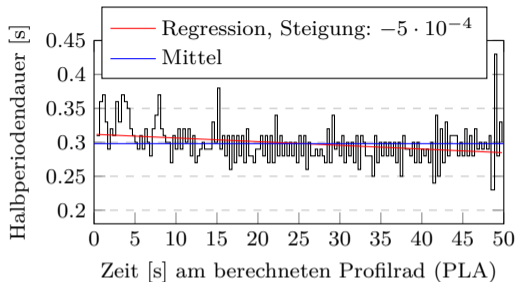
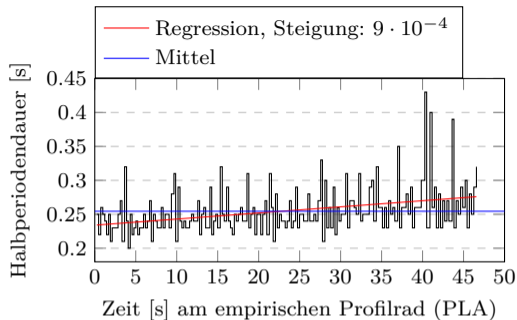
Ergebnisse

- ▶ Laufzeiten (Halbperioden) / empirisch, berechnet
 - PLA: 49,78 s (184), 46,57 s (168)
 - IGUS: 70,71 s (256), 63,87 s (200)
- ▶ berechnetes Profiltrad sorgt für regelmäßigeren Gang
- ▶ empirisches Profiltrad ist gegenüber breiterer Kräftespanne tolerant
- ▶ Schwingungsfrequenz mit berechnetem Profiltrad niedriger
 - Reibung beim berechneten Profiltrad, zu hohe Krafteinwirkung durch Hemmung beim empirischen
- ▶ TRIBOFILAMENT von IGUS bewirkt erhöhte Laufzeit und regelmäßigeren Gang
- ▶ Laufzeit mit empirischem Profiltrad höher, gegen Ende sehr unregelmäßiger Gang
 - verringerte Reibung

Tabelle: statistische Auswertung der Messdaten

E = empirischer Ansatz; M = mathematischer Ansatz

		1. Halbperiode		2. Halbperiode		Periode	
		E	M	E	M	E	M
PLA	Mittel	0,24 s	0,28 s	0,26 s	0,31 s	0,51 s	0,60 s
	Mittelabweichung	0,02 s	0,02 s	0,03 s	0,02 s	0,03 s	0,02 s
	Relative Abweichung	6,87 %	5,43 %	10,60 %	5,20 %	6,17 %	4,09 %
igus	Mittel	0,29 s	0,35 s	0,26 s	0,29 s	0,55 s	0,64 s
	Mittelabweichung	0,02 s	0,01 s	0,01 s	0,01 s	0,02 s	0,01 s
	Relative Abweichung	7,29 %	2,90 %	3,80 %	2,52 %	4,20 %	2,30 %



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!
Gibt es noch weitere Fragen?